Fakultet prometnih znanosti

Teorija leta III

Stlačivo strujanje fluida - Zbirka riješenih zadataka

Davor Franjković

Karolina Krajček

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka namijenjena je studentima prve godine diplomskog studija aeronautike na Fakultetu prometnih znanosti u Zagrebu. Zbirka u potpunosti pokriva nastavni plan i program kolegija Teorija leta III kojeg studenti aeronautike slušaju u trećem semestru.

Poglavlja u zbirci prate nastavni plan i program s obzirom na redoslijed i opseg gradiva u okviru nastavnog procesa. Zadaci su ilustrirani crtežima radi lakšeg razumijevanja problematike.

Na kraju Zbirke dana su dva priloga, Tablica standardne atmosfere i Popis formula kojima se studenti mogu služiti na pismenom dijelu ispita.

Autori

SADRŽAJ

POPIS OZNAKA

Oznaka	Opis	Jedinica
A	Površina krila	m^2
AR	Aspektni odnos krila	-
C_M	Koeficijent momenta	-
C_p	Koeficijent tlaka	-
C_{Di}	Inducirani koeficijent otpora	-
C_L	Koeficijent uzgona krila	-
V_∞	Brzina neporemećene struje zraka	m/s
V_e	Ekvivalentna brzina	m/s
D_0	Parazitni otpor	N
c_{MPB}	Koeficijent momenta oko prednjeg brida aeroprofila	-
c_p	Specifična toplina pri konstantnom tlaku	J/kg K
c_v	Specifična toplina pri konstantnom volumenu	J/kg K
c_d	Koeficijent otpora aeroprofila	-
c_l	Koeficijent uzgona aeroprofila	-
c_{lmax}	Maksimalni koeficijent uzgona aeroprofila	-
$\dot{m}$	Maseni protok	kg/s
a_0	Nagib krivulje uzgona aeroprofila	1/rad
p_∞	Tlak neporemećene struje zraka	Pa
q_∞	Dinamički tlak neporemećene struje zraka	Pa
x_{AC}	Položaj aerodinamičkog centra	m
x_{CP}	Položaj centra potiska	m
α_0	Kut nultog uzgona	rad
α_a	Apsolutni napadni kut	-
α_i	Inducirani napadni kut	rad

ρ_∞	Gustoća neporemećene struje zraka	kg/m^3
ρ_n	Gustoća zraka u ISA/SL	kg/m^3
D	Promjer	m
E	Modul elastičnosti fluida	
M	Moment propinjanja	Nm
Ma	Machov broj	-
Re	Reynoldsov broj	-
T	Temperatura zraka u K	K
V	Brzina zraka (zrakoplova)	m/s
L	Sila uzgona	N
e	Oswaldov koeficijent	-
$C_{l\alpha}$	Nagib krivulje uzgona krila	1/rad
n	Broj okretaja propelera u jedinici vremena	okr/s
p	Tlak zraka	Pa
p_z	Zaustavni tlak zraka	Pa
p_d	Dinamički tlak zraka	Pa
t	Temperatura zraka u °C	°C
u	Unutrašnja energija	J
α	Napadni kut	Rad
β		°
δ		
μ	Dinamički koeficijent viskoznosti	Pas
ν	Kinematički koeficijent viskoznosti	m^2/s

1 OSNOVNE VELIČINE STANJA FLUIDA

Poglavlje 7 (7.1 – 7.3; 515 – 531)

1.1 **Promatramo prostoriju pravokutnog oblika površine poda dimenzija 5 x 7 m i visine 3,3 m. Tlak i temperatura zraka u prostoriji su 1,01e5 Pa i 25°C. Izračunaj unutrašnju energiju i entalpiju zraka u prostoriji.**

Rješenje:

Najprije je potrebno izračunati masu zraka u prostoriji pomoću jednadžbe stanja:

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T}$$

$R = 287{,}053\ \ \mathrm{J/kgK}$

$t = 25\ °\mathrm{C}$

$T\ [\mathrm{K}] = t\ [°\mathrm{C}] + 273{,}15 \quad \rightarrow \quad T = t + 273{,}15 = 25 + 273{,}15 = 298{,}15\ \mathrm{K}$

$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{101\ 000}{287{,}053 \cdot 298{,}15} = 1{,}181\ \mathrm{kg/m^3}$

$V = 5 \times 7 \times 3{,}3 = 115{,}5\ \mathrm{m^3}$

$m = \rho \cdot V = 1{,}181\ \cdot 115{,}5 = 136{,}4\ \mathrm{kg}$

Specifična unutrašnja energija zraka u prostoriji računa se prema jednadžbi:

$$u = c_v \cdot T$$

$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} = \frac{287{,}053}{1{,}4 - 1} = 717{,}6\ \ \mathrm{J/kg\ K}$

$u = c_v \cdot T = 717{,}6 \cdot 298{,}15 = 2{,}138 \cdot 10^5\ \ \mathrm{J/kg}$

Unutrašnja energija u prostoriji U je prema tome:

$U = m \cdot u = 136{,}4 \cdot 2{,}138 \cdot 10^5 = 2{,}92 \cdot 10^7\ \ \mathrm{J}$

Specifična entalpija zraka u prostoriji računa se prema jednadžbi:

$$h = c_p \cdot T$$

$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} = \frac{1{,}4 \cdot 287{,}053}{1{,}4 - 1} = 1004{,}7\ \ \mathrm{J/kg\ K}$

$h = c_p \cdot T = 1004{,}7 \cdot 298{,}15 = 2{,}993 \cdot 10^5$ J/kg

Entalpija zraka u prostoriji H je prema tome:

$H = m \cdot h = 136{,}4 \cdot 2{,}993 \cdot 10^5 = 4{,}08 \cdot 10^7\ \text{J}$

Rezultat je moguće provjeriti s obzirom na činjenicu da omjer entalpije i unutrašnje energije mora biti jednak 1,4

$$\frac{h}{u} = \frac{c_p \cdot T}{c_v \cdot T} = \frac{c_p}{c_v} = \kappa = 1{,}4$$

Iz dobivenih rezultata slijedi da je

$$\frac{H}{U} = \frac{4{,}08 \cdot 10^7}{2{,}92 \cdot 10^7} = 1{,}4 \quad \surd$$

Promatramo rezervoar volumena unutrašnjosti od 30 m³. Dok se u rezervora upumpava zrak, tlak zraka unutar rezervoara kontinuirano raste. Promatramo trenutak u kojem je tlak zraka unutar rezervoara dostigao 10 atm. Pretpostavimo da je unutar rezeervoara temperatura zraka konstantna (postoji izmjenjivač topline) i iznosi 300 K. Zrak se upumpava u rezervora brzinom od 1 kg/s. Izračunajte: **1.2**

a) brzinu porasta tlaka u tom trenutku?

- **Koliko bi bilo potrebno vremena da se pri istoj toj brzini upumpavanja zraka u rezervoar tlak zraka podigne sa 10 na 20 atm**

Rješenje:

a)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{101\,000}{287{,}053 \cdot 298{,}15} = 1{,}181\ \text{kg/m}^3$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V}\frac{dm}{dt} = \frac{1\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}}{30\ \text{m}^3} = 0{,}0333$$

$$\frac{dp}{dt} = RT\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = 287{,}053 \cdot 300{,}15 \cdot 0{,}0333 = 2867{,}13\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2\text{s}}$$

c) Ako brzina upumpavanja ostane ista, tada i promjena gustoće s vremenom $d\rho/dt$ ostaje konstantna, ali i promjena tlaka u vremenu $dp/dt = 2867{,}13\ \mathrm{N/m^2 s}$. Prema tome, vrijeme potrebno da se tlak u rezervoaru poveća sa 10 na 20 atm iznosi:

$$t = \frac{(2{,}02 - 1{,}01) \cdot 10^5}{2867{,}13} = 352{,}27\ \mathrm{s} = 5{,}87\ \mathrm{min}$$

1.3

Avion Boeing 747 leti u standardnoj atmosferi na visini od 11000 m. Tlak u točki na krilu iznosi 19037,5 Pa. Uz pretpostavku izentropskog strujanja preko krila, izračunaj temperaturu u toj točki.

Rješenje:

Prema tablicama standardne atmosfere na visini od 11000 m tlak zraka iznosi 22627,3 Pa, a temperatura zraka 216,65 K.

Iz jednadžbe za izentropske relacije,

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$T = T_\infty \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 216{,}65 \left(\frac{19037{,}5}{22627{,}3}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} = 206{,}2\ \mathrm{K} = -67\ \mathrm{°C}$$

1.4

Promatramo rezervoar nadzvučnog aerotunela. Tlak i temperatura zraka u rezervoaru su 20,2 bar i 300 K. Zrak iz rezervoara širi se prema cijevi tunela. Na određenom položaju u cijevi tlak zraka iznosi 1,01 bar. Izračunaj temperaturu zraka na istom položaju ako je:

- **ekspanzija izentropska**
- **ekspanzija neizentropska sa porastom entropije kroz cijev do tog položaja od 320 J/kg K.**

Rješenje:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 300 \left(\frac{1{,}01}{20{,}2}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} = 127{,}5\ \mathrm{K}$$

b) neizentropska ekspanzija $\Delta s = 320\ \mathrm{J/kg \cdot K}$

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$320 = 1004{,}6 \cdot \ln\left(\frac{T_2}{300}\right) - 287{,}053 \cdot \ln\left(\frac{1{,}01}{20{,}2}\right)$$

$$320 = 1004{,}6 \cdot \ln\left(\frac{T_2}{300}\right) - (-859{,}93)$$

$$\ln\left(\frac{T_2}{300}\right) = \frac{320 - 859{,}93}{1004{,}6} = -0{,}5375$$

$$\frac{T_2}{300} = e^{-0{,}5375} = 0{,}5842$$

$$T_2 = 300 \cdot 0{,}5842 = 175{,}3\ \mathrm{K}$$

U slučaju neizentropske ekspanzije, kada entropija raste temperatura u cijevi je veća. Fizikalno gledajući do porasta temperature u cijevi (odnosno rasta entropije) može doći zbog trenja zraka, prisutnosti udarni valova unutar cijevi ili dovođenja topline iz okoline kroz cijevi tunela. Intuitivno znamo da svi ti nepovratni procesi rezultiraju većom temperaturom zraka nego izentropska ekspanzija koja prema definiciji pretpostavlja adijabatsku i reverzibilnu (bez trenja) ekspanziju.

Temperatura i tlak u zaustavnoj točki na raketi velike brzine iznose: 519 K i $7,903 \cdot 10^5$. Izračunajte: **1.5**

a) ρ, c_p, c_v , u i h u zaustavnj točki

b) c_p, c_v , u i h zraka u ISA/SL uvjetima

Rješenje:

a) Iz jednadžbe stanja,

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{7{,}903 \cdot 10^5}{287{,}053 \cdot 519} = 5{,}305\ \mathrm{kg/m^3}$$

kod većine praktičnih problema stlačivog strujanja, temperature plina su umjerene, pa se plin (zrak) smatra kalorijski savršenim, odnosno specifične topline su konstantne.

$$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} = \frac{1{,}4 \cdot 287{,}053}{1{,}4 - 1} = 1004{,}7\ \ \mathrm{J/kg\,K} \qquad \text{... specifična toplina pri konstantnom tlaku}$$

$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} = \frac{287{,}053}{1{,}4 - 1} = 717{,}6 \;\; \mathrm{J/kg\,K}$ ... specifična toplina pri konstantnom volumenu

provjera: $c_p = c_v \cdot \kappa = 717{,}6 \cdot 1{,}4 = 1004{,}7 \;\; \mathrm{J/kg\,K}$

$c_p = c_v + R = 717{,}6 + 287{,}053 = 1004{,}7 \;\; \mathrm{J/kg\,K}$

$u = c_v \cdot T = 717{,}6 \cdot 519 = 3{,}7 \cdot 10^5 \; \mathrm{J/kg}$ ... specifična unutarnja energija

$h = c_p \cdot T = 1004{,}7 \cdot 519 = 5{,}2 \cdot 10^5 \; \mathrm{J/kg}$ ... specifična entalpija

b) Specifične topline za zrak su konstantne

$$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} = \frac{1{,}4 \cdot 287{,}053}{1{,}4 - 1} = 1004{,}7 \;\; \mathrm{J/kg\,K}$$

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} = \frac{287{,}053}{1{,}4 - 1} = 717{,}6 \;\; \mathrm{J/kg\,K}$$

$$u = c_v \cdot T = 717{,}6 \cdot 288{,}15 = 2{,}06 \cdot 10^5 \; \mathrm{J/kg}$$

$$h = c_p \cdot T = 1004{,}7 \cdot 288{,}15 = 2{,}9 \cdot 10^5 \; \mathrm{J/kg}$$

1.6 **Bernoullijeva jednadžba izvedena je iz II. Newtonovog zakona koji kaže u osnovi da je sila = masa x ubrzanje. Međutim kako svi izrazi u Bernoullijevoj jednadžbi imaju dimenziju energije po jedinici volumena (pr. Pa = N/m^2 = Nms/sm^3 = Ws/m^3 = J/m^3) nameće se zaključak kako je Bernoullijeva jednadžba zapravo energetska jednadžba za nestlačivo strujanje. Ako je to točno, onda bi Bernoullijevu jednadžbu trebalo biti moguće izvesti iz energetske jedandžbe za stlačivo strujanje. Iz izraza za neviskozno, adijabatsko i stlačivo strujanje,**

$$h + \frac{V^2}{2} = konst.$$

izvedite prikladne zaključke za nestlačivo strujanje i izvedite Bernoullijevu jednadžbu.

Rješenje:

Iz energetske jednadžbe za neviskozno, adijabatsko i stlačivo strujanje,

$$h + \frac{V^2}{2} = konst.$$

potrebno je izvesti Bernoullijevu jedandžbu za nestlačivo strujanje,

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = konst$$

Ako se uzme u obzir da je entalpije jednaka $h = c_p T$ slijedi,

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = konst.$$

U diferencijalnom obliku jednadžba se može zapisati:

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = konst. \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$c_p dT + V dV = 0$$

$$\mathrm{d}h + V dV = 0$$

Entalpija je jednaka zbroju unutrašnje energije i umnoška tlaka sa specifičnim volumenom,

$h = pv + e$ odnosno promjena entalpije je jednaka,

$$dh = d(pv + e) = pdv + vdp + de$$

$$dh - vdp = pdv + de$$

Prvi zakon termodinamike:

$$\delta q = de + pdv$$

U slučaju izentropskog optjecanja $\delta q = 0 = de + pdv$.

Slijedi da je onda u slučaju izentropskog strujanja i lijeva strana jednadžbe jednaka 0.

$$dh - vdp = 0 \quad \rightarrow \quad dh = vdp = \frac{dp}{\rho}$$

Ako dobiveni izraz za entalpiju ubacimo sada u diferencijalni oblik Bernoulli-Lagrangeove jednadžbe

$$\frac{dp}{\rho} + V dV = 0$$

Jednadžbu pomnožimo sa ρ i integriramo

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = 0$$

2 OSNOVNE JEDNADŽBE ZA NEVISKOZNO STLAČIVO STRUJANJE

Poglavlja 7.4 i 7.5

2.1 **U točki u struji zraka tlak, temperatura i brzina su 1,01e5, 320 K i 1000 m/s. Izračunaj zaustavnu temperaturu i tlak u toj točki.**

Rješenje:

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0$$

$$h = c_p T$$

$$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}$$

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_0$$

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = T + \left(\frac{\kappa - 1}{2\kappa R}\right) V^2$$

$$T_0 = 320 + \left(\frac{1{,}4 - 1}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 287{,}053}\right) \cdot 1000^2 = 320 + 497{,}8$$

$$T_0 = 817{,}8\ \mathrm{K}$$

Prema definiciji zaustavni tlak je tlak koji bi postojao kada bi se struja zraka u točki izentropski zaustavila ($V = 0$ m/s). Prema tome moguće je koristiti izentropske relacije kako bi se povezali statički i zaustavni uvjeti zraka.

Prema jednadžbama slijedi,

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

$$p_0 = p \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 1{,}01 \cdot 10^5 \left(\frac{817{,}8}{320}\right)^{\frac{1{,}4}{0{,}4}}$$

$$p_0 = 26{,}95 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$$

Avion leti na visini od 3000 m u standardnoj atmosferi. Pitot cijev montirana na nosu zrakoplova mjeri tlak od 1,06 x 10^5 Pa. Avion leti visokom podzvučnom brzinom leta, brže od 150 m/s, odnosno ne smije se zanemariti stlačivost zraka. Izračunaj brzinu leta zrakoplova.

Rješenje:

Pitot cijev u nestlačivoj struji zraka mjeri zaustavni tlak. U stlačivoj struji zraka također mjeri zaustavni tlak ako pretpostavimo da se zrak do usta Pitot cijevi izentropski komprimira na nultu brzinu. Dakle, tlak na ustima Pitot cijevi je zaustavni tlak p_0. Iz jednadžbi izentropski relacija moguće je odrediti zaustavnu temperaturu uz poznati tlak i temperaturu okolnog zraka na visini od 3000 m,

$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left(\frac{T_0}{T_\infty}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$T_0 = T_\infty \left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Iz tablice standardne atmosfere na visini od 3000 m temperatura i tlak zraka iznose,

$$T_\infty = 268{,}65 \text{ K}$$

$$p_\infty = 70105{,}2 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 268{,}65 \left(\frac{1{,}05 \cdot 10^5}{70105{,}2}\right)^{\frac{0{,}4}{1{,}4}} = 301{,}5 \text{ K}$$

Iz energetske jedandžbe moguće je potom odrediti brzinu,

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_0$$

Temperatura i brzina u energetskoj jednadžbi su vrijednosti slobodne struje zraka pa slijedi,

$$c_p T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2} = c_p T_0$$

$$V_\infty = \sqrt{2 c_p (T_0 - T_\infty)} = \sqrt{2 \cdot 1004{,}6(301{,}5 - 268{,}65)} = 257 \text{ m/s}$$

Zrakoplov leti u uvjetima ISA/SL. Temperatura u točki na krilu iznosi 250 K. Odredi tlak i gustoću u toj točki pretpostavljajući stlačivo izentropsko strujanje.

Rješenje:

Jednadžba izentropskog strujanja

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\kappa} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 101325 \left(\frac{250}{288}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 61637\ \mathrm{Pa}$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 1{,}225 \left(\frac{250}{288}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 0{,}8589\ \mathrm{kg/m^3}$$

2.4 **Aeroprofil se nalazi u slobodnoj struji zraka čiji je tlak $p_\infty = 61\,810$ Pa, $\rho_\infty = 0,819\ \mathrm{kg/m^3}$ i brzina $V_\infty = 300\ \mathrm{m/s}$. U točki na površini aeroprofila tlak iznosi 50 660 Pa. Uz pretpostavku izentropskog strujanja, izračunaj brzinu u toj točki. Kolika bi bila pogreška (%) da se za izračun brzine koristila pogrešna Bernoullijeva jednadžba za nestlačivo strujanje?**

Rješenje:

$$T_\infty = \frac{p_\infty}{R \cdot \rho_\infty} = \frac{61810}{287{,}053 \cdot 0{,}819} = 263\ \mathrm{K}$$

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$T = T_\infty \left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 263\ \left(\frac{50660}{61810}\right)^{(1.4-1)/1.4} = 248{,}5\ \mathrm{K}$$

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} = konst.$$

$$c_p \cdot T + \frac{V^2}{2} = c_p \cdot T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2}$$

$$V = \sqrt{2c_p(T_\infty - T) + V_\infty^2} = \sqrt{2 \cdot 1004{,}7 \cdot (263 - 248{,}5) + 300^2} = 345\ \mathrm{m/s}$$

Ako bi se brzina u točki odredila pomoću Bernoullijeva jednadžbe,

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$$

I ako se u obzir uzme promjena gustoće zraka u točki,

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{50660}{287{,}053 \cdot 248{,}5} = 0{,}710\ \mathrm{kg/m^3}$$

slijedi da je brzina V,

$$V = \sqrt{\frac{2(p_\infty - p) + \rho_\infty V_\infty^2}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(61810 - 50660) + 0{,}819 \cdot 300^2}{0{,}710}} = 368\ \mathrm{m/s}$$

Greška u određivanju brzine je,

$$\Delta V = \frac{368 - 345}{345} = 0{,}067 = 6{,}7\%$$

3 BRZINA ZVUKA I ENERGETSKA JEDNADŽBA

Poglavlje 8 (8.1 – 8.5; -574)

3.1 **Zrakoplov leti brzinom od 250 m/s. Izračunaj njegov Ma broj ako leti u standardnoj atmosferi na visini:**

a) razine mora

b) 5 km

c) 10 km

Rješenje:

a) Prema tablicama standardne atmosfere,

$$T_\infty = 288{,}15 \text{ K}$$

$$a_\infty = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 288{,}15} = 340{,}2 \text{ m/s}$$

$$Ma_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty} = \frac{250}{340{,}2} = 0{,}735$$

b) Na visini od 5 km $T_\infty = 255{,}65$ K

$$a_\infty = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 255{,}65} = 320{,}5 \text{ m/s}$$

$$Ma_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty} = \frac{250}{320{,}5} = 0{,}78$$

c) Na visini od 10 km $T_\infty = 223{,}15$ K

$$a_\infty = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 223{,}15} = 299{,}5 \text{ m/s}$$

$$Ma_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty} = \frac{250}{299{,}5} = 0{,}835$$

3.2 **Koliki je Ma broj u točki na krilu zrakoplova ako je brzina struje zraka u toj točki 1000 m/s, a temperatura *T* = 320 K.**

Rješenje:

$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 320} = 358{,}6 \text{ m/s}$$

$$Ma = \frac{V}{a} = \frac{1000}{358{,}6} = 2{,}79$$

Machov broj je lokalna karakteristika struje zraka. Mijenja se od točke do točke kroz strujno polje. Razlikuje se od Ma broja slobodne struje zraka (brzine leta aviona).

3.3 **Izračunaj omjer kinetičke i unutrašnje energije u točki struje zraka u kojoj je Ma broj:**

a) Ma = 2

b) Ma = 20

Rješenje:

$$\frac{kinetička\ energija}{unutrašnja\ energija}=\frac{\frac{V^2}{2}}{e}=\frac{\frac{V^2}{2}}{c_v\cdot T}=\frac{\frac{V^2}{2}}{c_v\frac{R}{\kappa-1}\cdot T}=\frac{\frac{V^2}{2}}{c_v\frac{a^2}{\kappa(\kappa-1)}T}=\frac{\kappa(\kappa-1)V^2}{c_v 2a^2T}=\frac{\kappa(\kappa-1)}{c_v 2T}Ma^2$$

Ma broj je mjera usmjerenog gibanja plina s obzirom na nasumično termalno gibanje molekula.

$$a=\sqrt{\kappa RT}$$
$$Ma=\frac{V}{a}$$

$$a)\quad \frac{\kappa(\kappa-1)}{2}Ma^2=\frac{1{,}4(1{,}4-1)}{2}\cdot 2^2=0{,}28\cdot 4=1{,}12$$

$$\mathrm{b)}\quad \frac{\kappa(\kappa-1)}{2}Ma^2=\frac{1{,}4(1{,}4-1)}{2}\cdot 20^2=0{,}28\cdot 400=112$$

Pri letu Ma=2, kinetička energija gotovo je jednaka unutrašnjoj, dok kod velikih hipersoničnih brzina strujanja, kinetička energija je više od 100 puta veća od unutrašnje energije.

3.4 **Promatramo dugačku cijev dužine 300 m. Cijev je napunjena zrakom temperature 320 K. Na jednom kraju cijevi generira se zvučni val. Koliko će mu trebati da dođe do dugog kraja?**

Ako je cijev napunjena helijem temperature 320 K, koliko će tada biti potrebno zvučnom valu s jedne na drugu stranu. Za jednoatomne plinove kao što je helij, κ = 1,67. Plinska konstanta za helij iznosi *R* = 2078,5 J/(kg K).

Rješenje:

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1{,}4\cdot 287{,}053\cdot 320}=358{,}6\ \mathrm{m/s}$$

Ako je ℓ duljina cijevi, a t vrijeme putovanja zvučnog vala kroz cijev, slijedi:

$$t=\frac{\ell}{a}=\frac{300}{358{,}6}=0{,}837\ \mathrm{s}$$

b)

$$a=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1{,}4\cdot 2078{,}5\cdot 320}=1054\ \mathrm{m/s}$$

$$t = \frac{\ell}{a} = \frac{300}{1054} = 0{,}285 \text{ s}$$

Brzina zvuka u heliju je puno veća nego u zraku pri istoj temperaturi iz razloga što:

1. κ za helij je veći i još važnije

2. helij ima molekularnu težinu M = 4 što je puno manje nego zrak koji ima molekularnu težinu M=28. Zbog toga je plinska konstanta za helij puno veća nego za zrak ($R = \Re/M$, $\Re$ je jedinstvena plinska konstanta)

3.5 **Promatramo točku u struji zraka u kojoj su lokalni Ma broj, statički tlak i statička temperatura zraka jednaki 3.5, 30300 Pa i 180 K. Izračunaj lokalne vrijednosti zaustavnog tlaka, zaustavne temperature, T^*, a^* i Ma^* u toj točki.**

Rješenje:

Iz tablice karakteristika izentropskog strujanja za Ma=3,5 slijedi,

$p_0/p = 76{,}27$

$T_0/T = 3{,}45$

ili prema izentropskim relacijama

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}^2$$

Dakle,

$p_0 = 76{,}27 \cdot p = 76{,}27 \cdot 30300 = 23{,}1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$T_0 = 3{,}45 \cdot T = 3{,}45 \cdot 180 = 621 \text{ K}$

Za Ma =1, $T_0/T^* = 1{,}2$

$$T^* = \frac{T_0}{1,2} = \frac{621}{1,2} = 517,5\ \mathrm{K}$$

$$a^* = \sqrt{\kappa R T^*} = \sqrt{1,4 \cdot 2078,5 \cdot 517,5} = 456\ \mathrm{m/s}$$

$$a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{1,4 \cdot 2078,5 \cdot 180} = 268,9\ \mathrm{m/s}$$

$$V = Ma \cdot a = 3,5 \cdot 268,9 = 941\ \mathrm{m/s}$$

$$Ma^* = \frac{V}{a^*} = \frac{941}{456} = 2,06$$

Gornji rezultat moguće je dobiti i direktno iz jednadžbe

$$Ma^{*2} = \frac{(\kappa + 1)Ma^2}{2 + (\kappa - 1)Ma^2} = \frac{2,4 \cdot 3,5^2}{2 + 0,4 \cdot 3,5^2} = 4,26$$

$$Ma^* = \sqrt{4,26} = 2,06$$

Promatra se aeroprofil u slobodnoj struji zraka brzine Ma = 0,6 i tlaka p_∞ = 1,01 bar kako je prikazano na slici. U točki 1 na aeroprofilu tlak zraka iznosi p_1 = 0,76 bar. Izračunaj: **3.6**

a) lokalni Machov broj u točki 1. Pretpostavi izentropsko strujanje zraka preko aeroprofila

b) brzinu zraka u točki 1 ako je temperatura slobodne struje zraka 15 °C.

Rješenje:

a) Zaustavni tlak slobodne struje zraka moguće je izračunati preko tablica karakteristika izentropskog strujanja za $Ma_\infty = 0,6$.

$$\frac{p_{0,\infty}}{p_\infty} = 1,276$$

$$p_{0,\infty} = 1,276 \cdot p_\infty = 1,276 \cdot 1,01 = 1,289\ \mathrm{bar}$$

Kada se radi o izentropskom strujanju ukupni zaustavni tlak u struji zraka ostaje konstantan,

$p_{0,1} = p_{0,\infty} = 1,289$ bar, odnosno

$$\frac{p_{0,1}}{p_1} = \frac{1,289}{0,76} = 1,696$$

Prema tablici izentropskog strujanja slijedi da za taj omjer tlakova dobivamo lokalni Ma broj jednak

$Ma_1 = 0{,}9$

2.način

$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Omjer jednadžbi,

$$\frac{\frac{p_0}{p_\infty}}{\frac{p_0}{p_1}} = \frac{p_1}{p_\infty} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}_1^2 = \left(\frac{p_\infty}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}_\infty^2\right)$$

$$\mathrm{Ma}_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_\infty}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\mathrm{Ma}_\infty^2\right) - 1\right]$$

b) Strujanje je izentropsko pa vrijedi relacija,

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \left(\frac{T_1}{T_\infty}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$T_1 = T_\infty\left(\frac{p_1}{p_\infty}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 288{,}15\left(\frac{0{,}76}{1{,}01}\right)^{\frac{0{,}4}{1{,}4}}$$

$$T_1 = 265{,}66\ \mathrm{K}$$

$$a_1 = \sqrt{\kappa R T_1} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 265{,}66} = 326{,}7\ \mathrm{m/s}$$

$$V_1 = Ma_1 \cdot a_1 = 0{,}91 \cdot 326{,}7 = 297{,}3\ \mathrm{m/s}$$

4 NORMALNI UDARNI VAL

Poglavlje 8.6 (str. 575), 8.7

$$\boldsymbol{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$$

$$\boldsymbol{p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2}$$

$$\boldsymbol{h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{a^2 = \frac{dp}{d\rho}}$$

4.1 **Promatra se normalni udarni val u zraku. Ispred normalnog udarnog vala karakteristike struje zraka su: u_1= 680 m/s , T_1= 288 K i p_1= 1,01 bar. Izračunaj brzinu, temperaturu i tlak zraka iza udarnog vala.**

Rješenje:

Zrak prolaskom kroz udarni val naglo mijenja svoje karakteristike, *T* i *p* rastu, a *V* opada.

$$a_1 = \sqrt{\kappa R T_1} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 288{,}15} = 340 \text{ m/s}$$

$$Ma_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{680}{340} = 2$$

Iz tablica karakteristika normalnog udarnog vala slijedi da je,

$$p_2/p_1 = 4{,}5$$

$$T_2/T_1 = 1{,}687$$

$$Ma_2 = 0{,}5774$$

Slijedi da su:

$$p_2 = 4{,}5 \cdot p_1 = 4{,}5 \cdot 1{,}01 = 4{,}55 \text{ bar}$$

$$T_2 = 1{,}687 \cdot T_1 = 1{,}687 \cdot 288{,}15 = 486{,}1 \text{ K}$$

$$a_2 = \sqrt{\kappa R T_2} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 486{,}1} = 442 \text{ m/s}$$

$$u_2 = Ma_2 \cdot a_2 = 0{,}5774 \cdot 442 = 255 \text{ m/s}$$

Promatra se normalni udarni val u nadzvučnoj struji zraka u kojoj je tlak zraka prije udarnog vala jednak 1,01 bar. Izračunaj gubitak zaustavnog tlaka zraka kroz udarni val kada je Ma broj ispred udarnog vala jednak: **4.2**

a) ***Ma*₁ = 2**

b) ***Ma*₁ = 4**

Usporedi ta dva rezultata i komentiraj!

Rješenje:

a) Ukupni tlak ispred udarnog vala moguće je izračunati iz omjera tlakova s obzirom na Ma broj struje zraka. Vidi Prilog ?

Za $Ma_1 = 2$ iz Tablice karakteristika izentropske struje zraka $p_{0,1}/p_1 = 7{,}824$

Dakle,

$$p_{0,1} = \left(\frac{p_{0,1}}{p_1}\right) p_1 = 7{,}824 \cdot 1{,}01 = 7{,}92 \text{ bar}$$

Ukupni tlak iz udarnog vala određuje se preko omjera $p_{0,2}/p_{0,1}$ iz Tablica za normalni udarni val

Za $Ma_1 = 2$ iz Priloga ?? $p_{0,2}/p_{0,1} = 0{,}7209$

$$p_{0,2} = \left(\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}\right) p_{0,1} = 0{,}7209 \cdot 7{,}92 = 5{,}71 \text{ bar}$$

Razlika ukupnog tlaka (gubitak zaustavnog tlaka) je

$$p_{0,1} - p_{0,2} = 7{,}92 - 5{,}71 = 2{,}21 \text{ bar}$$

b)

Za $Ma_1 = 4$ iz Tablice karakteristika izentropske struje zraka $p_{0,1}/p_1 = 151{,}8$

$$p_{0,1} = \left(\frac{p_{0,1}}{p_1}\right) p_1 = 151{,}8 \cdot 1{,}01 = 154 \text{ bar}$$

Ukupni tlak iz udarnog vala određuje se preko omjera $p_{0,2}/p_{0,1}$ iz Tablica za normalni udarni val

Za $Ma_1 = 4$ $\quad p_{0,2}/p_{0,1} = 0{,}1388$

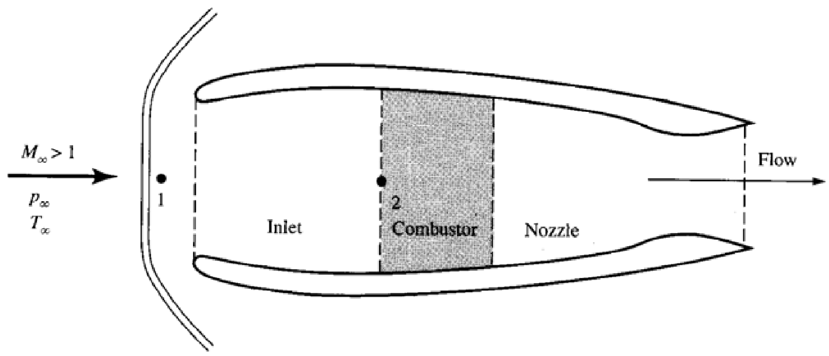
$$p_{0,2} = \left(\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}\right) p_{0,1} = 0{,}1388 \;\cdot 154 = 21{,}4 \text{ bar}$$

Gubitak zaustavnog tlaka je

$$p_{0,1} - p_{0,2} = 154 - 21{,}4 = 132{,}6 \text{ bar}$$

Gubitak ukupnog tlaka smanjuje sposobnost toka da izvrši korisni rad, što znači da smanjuje sposobnost nekog uređaja i radi trošak. Dvostruko veći Ma broj 60 puta je povećao gubitak ukupnog tlaka (132,6/2,21 = 60).

4.3 **Ramjet motor (uređaj za koji stvara potisak bez rotirajućih dijelova) leti na visini od 10 km u standardnoj atmosferi. Brzina leta iznosi Ma = 2. Izračunajte temperaturu i tlak zraka u točki 2 u trenutku kada je Ma_2 = 0.2. Strujanje između točke 1 i 2 je izentropsko.**



Rješenje:

Ukupni tlak i ukupna temperatura (zaustavni uvjeti) ispred normalnog udarnog vala mogu se odrediti iz Tablice izentropskog strujanja Ma_∞ = 2

$$p_{0,\infty} = \left(\frac{p_{0,\infty}}{p_\infty}\right) p_\infty = 7{,}824 \cdot 2{,}65 \cdot 10^4 = 2{,}07 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2{,}07 \text{ bar}$$

$$T_{0,\infty} = \left(\frac{T_{0,\infty}}{T_\infty}\right) T_\infty = 1{,}8 \cdot 223{,}3 = 401{,}9 \text{ K}$$

U točki 1 iza udarnog vala, zaustavni tlak je za Ma_∞ = 2 (Tablica normalni udarni val)

$$p_{0,1} = \left(\frac{p_{0,1}}{p_{0,\infty}}\right) p_{0,\infty} = 0{,}7209 \cdot 2{,}07 = 1{,}49 \text{ bar}$$

Ukupna temperatura je konstantna kroz udarni val jer je $h_0 = konst.$

$T_{0,1} = T_{0,\infty} = 401{,}9 \text{ K}$

S obzirom da je strujanje između točaka 1 i 2 izentropsko, zaustavni tlak i temperatura su konstantni između tih točaka,

$p_{0,2} = p_{0,1} = 1{,}49 \text{ bar}$

$T_{0,2} = T_{0,1} = 401{,}9 \text{ K}$

U točki 2 u kojoj je $Ma_2 = 0{,}2$ moguće je odrediti statički tlak i temperaturu prema Prilogu ??

$p_{0,2}/p_2 = 1{,}028$ i $T_{0,2}/T_2 = 1{,}008$

$$p_2 = \left(\frac{p_2}{p_{0,2}}\right) p_{0,2} = \frac{1{,}49}{1{,}028} = 1{,}45 \text{ bar}$$

$$T_2 = \left(\frac{T_2}{T_{0,2}}\right) T_{0,2} = \frac{401{,}9}{1{,}008} = 399 \text{ K}$$

4.4 **Omjer tlakova kroz normalni udarni val u zraku je 4,5. Koliki su Ma broj ispred i iza udarnog vala? Koliki je omjer gustoća i omjer temperatura zraka kroz udarni val?**

Rješenje:

$p_2/p_1 = 4{,}5$

Prema tablicama za normalni udarni val za $p_2/p_1 = 4{,}5$

$$Ma_1 = 2 \quad i \quad Ma_2 = 0{,}5774$$

Iz istih tablica slijedi da je:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 2{,}667 \qquad i \qquad \frac{T_2}{T_1} = 1{,}687$$

Kod normalnih udarnih valova omjer tlakova iza i ispred udarnog vala jednoznačno određuje Ma ispred udarnog vala, Ma broj iza udarnog vala kao i omjere ostalih termodinamičkih karakteristika kroz val.

4.5 **Omjer temperatura zraka kroz udarni val iznosi 5,8. Koliki je Ma broj ispred, a koliki iza udarnog vala. Koliki je omjer gustoća i tlakova kroz val?**

Rješenje:

Prema tablicama za normalni udarni val za $T_2/T_1 = \mathbf{5,8}$

$$Ma_1 = 5 \quad i \quad Ma_2 = 0{,}4152$$

Iz istih tablica slijedi da je:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 5 \qquad i \qquad \frac{p_2}{p_1} = 29$$

Kod normalnih udarnih valova omjer ttemperatura iza i ispred udarnog vala jednoznačno određuje Ma ispred udarnog vala, Ma broj iza udarnog vala kao i omjere ostalih termodinamičkih karakteristika kroz val.

4.6 **Ma broj iza udarnog vala iznosi 0,4752. Koliki je Ma broj ispred udarnog vala? Kolika su omjeri gustoće, tlaka i temperature kroz val?**

Rješenje:

Prema tablicama za normalni udarni val za $Ma_2 = 0{,}4752$

$$Ma_1 = 5 \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 3{,}857 \qquad \frac{p_2}{p_1} = 10{,}33 \qquad \frac{T_2}{T_1} = 2{,}679$$

Kod normalnih udarnih valova omjer određivanje Ma broja iza udarnog vala jednoznačno određuje Ma ispred udarnog vala, kao i omjere ostalih termodinamičkih karakteristika kroz val.

4.7 **Brzina i temperatura struje zraka ispred normalnog udarnog vala iznose 1215 m/s i 300 K. Izračunajte brzinu struje zraka iza vala?**

$$a_1 = \sqrt{\kappa R T_1} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 300} = 347{,}2 \text{ m/s}$$

$$Ma_1 = \frac{u_1}{a_1} = \frac{1215}{347{,}2} = 3{,}5$$

Prema tablicama za normalni udarni val za $Ma_1 = 3{,}5$

$Ma_2 = 0{,}4512 \quad i \quad \frac{T_2}{T_1} = 3{,}315$

$T_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right) T_1 = 3{,}315 \cdot 300 = 994{,}5 \text{ K}$

$a_2 = \sqrt{\kappa R T_2} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 994{,}5} = 632{,}1 \text{ m/s}$

$u_2 = Ma_2 \cdot a_2 = 0{,}4512 \cdot 632{,}1 = 285{,}2 \text{ m/s}$

4.8 **Promatramo normalni udarni val čiji je $Ma_1 = 3{,}53$. Izračunaj Ma broj iza udarnog vala:**

a) koristeći najbližu vrijednost iz tablice vrijednosti za udarne valove

b) interpolirajući tablične vrijednosti

c) egzaktno analitički proračunati

Usporedi rezultate!

a) $Ma_1 = 3{,}53$

Prema tablicama za normalni udarni val za $Ma_1 = 3{,}53$ najbliža vrijednost za Ma broj je:

$Ma_2 = 0{,}4492$

b) $Ma_1 = 3{,}53$ je između $Ma_1 = 3{,}5$ gdje je $Ma_2 = 0{,}4512$ i $Ma_1 = 3{,}55$ gdje je $Ma_2 = 0{,}4492$

Intepolacijom slijedi da je za $Ma_1 = 3{,}53$

$$Ma_2 = 0{,}4492 + \frac{(3{,}55 - 3{,}53)}{(3{,}55 - 3{,}5)}(0{,}4512 - 0{,}4492)$$

$$Ma_2 = 0{,}4492 + 0{,}0008 = 0{,}45$$

c)

$\mathrm{Ma}_2^2 = \frac{1 + [(\kappa - 1)/2]\mathrm{Ma}_1^2}{\kappa \mathrm{Ma}_1^2 - (\kappa - 1)/2} = \frac{1 + [(1{,}4 - 1)/2]3{,}53^2}{1{,}4 \cdot 3{,}53^2 - (1{,}4 - 1)/2} = 0{,}2025$

$Ma_2 = 0{,}45$

4.9 **Zrakoplov Lockhead SR-71 Blackbird leti na visini od 25 km. Tlak izmjeren na Pitot cijevi zrakoplova iznosi $3{,}88\cdot10^4$ Pa. Izračunaj brzinu zrakoplova.**

Rješenje:

Na visini od 25 km, p = 2.5273×10^3 Pa i T = 216.66 K

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \frac{3.88 \cdot 10^4}{2.5273 \cdot 10^3} = 15.35$$

Iz tablice za normalni udarni val za $p_{0,2}/p_1 = 15.35$, slijedi da je $Ma_1 = 3.4$

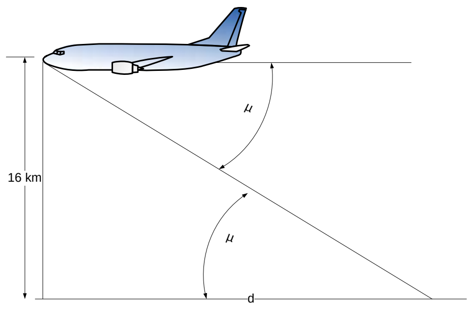
$$a_1 = \sqrt{\kappa R T_1} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 216.66} = 295 \text{ m/s}$$

$$V_1 = Ma_1 \cdot a_1 = 3.4 \cdot 295 = 1003 \text{ m/s}$$

5 KOSI UDARNI VAL

Poglavlje 9

5.1 **Nadzvučni zrakoplov leti na Ma = 2 na visini od 16 km. Pretpostavimo da se udarni valovi od zrakoplova brzo spajaju u Machov val koji presijeca tlo iza zrakoplova, uzrokujući „zvučni udar" koji čuje osoba na tlu. Na kojoj udaljenosti od osobe na tlu se nalazi zrakoplov u trenutku zvučnog udara?**

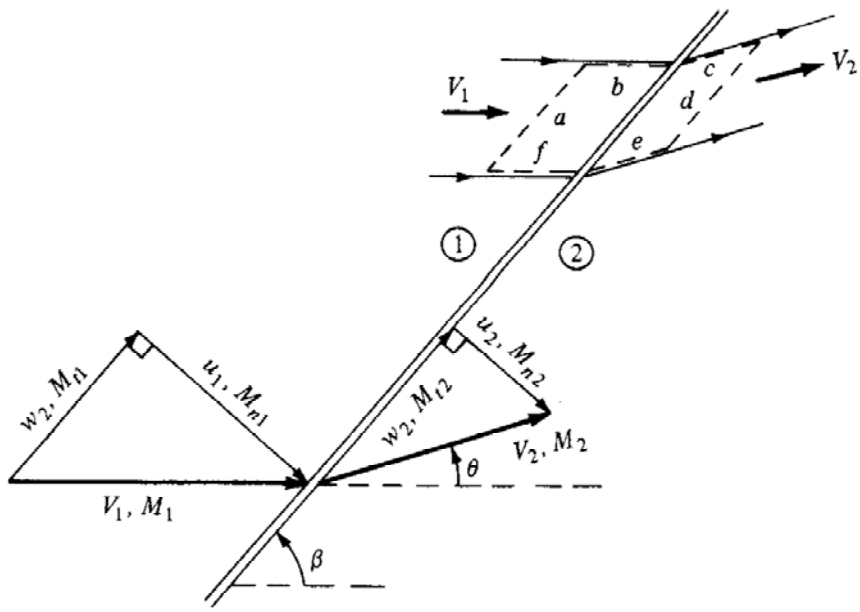


Rješenje:

$$\mu = \sin^{-1}\left(\frac{1}{Ma}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

$$\tan\mu = \frac{H}{d} \qquad \rightarrow \quad d = \frac{H}{\tan\mu} = \frac{16\cdot 10^3}{\tan 30°} = 27{,}7\ \text{km}$$

5.2 **Promatra se nadzvučno strujanje sa Ma = 2, p = 1,01 bar i T = 288 K. Ova struja zraka kut otklona od 20°. Izračunaj M, p, T, p_0 i T_0 iza rezultirajućeg kosog udarnog vala.**



Rješenje:

$M_1 = 2$

$p_1 = 1{,}01\ \text{bar}$

$T_1 = 288 \text{ K}$

$\theta = 20°$

Iz Dijagrama za karakteristike kosog udarnog vala $\theta - \beta - Ma$ (Slika 9.9, str.613.)

$M_1 = 2 \text{ i } \theta = 20° \quad \rightarrow \quad \beta = 53.4°$

Dalje možemo odrediti normalnu komponentu Ma broja prije udarnog vala

$M_{n,1} = M_1 \sin\beta = 2 \cdot \sin 53.4° = 1.6$

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + [(\kappa - 1)/2]M_{n,1}^2}{\kappa M_{n,1}^2 - (\kappa - 1)/2} = \frac{1 + [(1{,}4 - 1)/2] \cdot 1{,}6^2}{1{,}4 \cdot 1{,}6^2 - (1{,}4 - 1)/2} = 0{,}447$$

$M_{n,2} = 0{,}6684$

Pomoću koje slijedi da je

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0{,}6684}{\sin(53.4° - 20°)} = 1{,}21$$

Omjere tlakova, temperature i gustoće možemo odrediti preko jednadžbi za normalni udarni val:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\left(M_{n,1}^2 - 1\right) = 1 + \frac{2 \cdot 1{,}4}{1{,}4 + 1}(1{,}6^2 - 1) = 2{,}82$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_{n,1}^2}{2 + (\gamma - 1)M_{n,1}^2} = \frac{(1{,}4 + 1) \cdot 1{,}6^2}{2 + (1{,}4 - 1) \cdot 1{,}6^2} = 2{,}032$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2{,}82}{2{,}032} = 1{,}388$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} = 1004{,}7 \cdot \ln 1{,}388 - 287 \cdot \ln 2{,}82 = 31{,}86$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = e^{-(s_2 - s_1)/R} = e^{-31{,}86/287} = 0{,}895$$

Provjera iz Appendix B: $\quad \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = 0.8952$

Konačno je moguće izračunati tlak i temperaturu iza kosog udarnog vala:

$p_2 = 2{,}82 \cdot 1{,}01 = 2{,}8482 \text{ bar}$

$T_2 = 1{,}388 \cdot 288 = 399{,}7 \text{ K}$

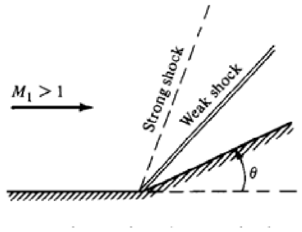
Zaustavne uvjete za $M_1 = 2$ moguće je odrediti pomoću Appendix A: $p_{0,1}/p_1 = 7.824$ i $T_{0,1}/T_1 = 1.8$

$$p_{0,2} = \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \cdot \frac{p_{0,1}}{p_1} \cdot p_1 = 0.8952 \cdot 7.824 \ \cdot 1{,}01 = 7.07 \text{ bar}$$

Totalna temperatura kroz val je konstantna i iznosi:

$$T_{0,2} = T_{0,1} = \frac{T_{0,1}}{T_1} \cdot T_1 = 1.8 \cdot 288 = 518.4 \text{ K}$$

5.3 **Promatra se kosi udarni val pod kutom od 30°. Machov broj ispred vala iznosi 2.4. Izračunaj nagib struje zraka, Machov broj, te omjere tlaka i temperature iza udarnog vala.**



Rješenje:

$M_1 = 2.4 \quad i \quad \beta = 30°$

$$\tan\theta = 2\cot\beta \frac{M_1^2 \sin^2\beta - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2} = 2\cot 30° \frac{2.4^2 \cdot \sin^2 30° - 1}{2.4^2 \cdot (\gamma + \cos 60°) + 2} = 0{,}1178$$

$\theta = 6.5°$

Ili iz Dijagrama za karakteristike kosog udarnog vala $\theta - \beta - Ma$ (Slika 9.9, str.613.)

$M_{n,1} = M_1 \sin\beta = 2.4 \cdot \sin 30° = 1.2$

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + [(\kappa - 1)/2]M_{n,1}^2}{\kappa M_{n,1}^2 - (\kappa - 1)/2} = \frac{1 + [(1{,}4 - 1)/2] \cdot 1{,}2^2}{1{,}4 \cdot 1{,}2^2 - (1{,}4 - 1)/2} = 0{,}709$$

$M_{n,2} = 0{,}8422$

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0{,}8422}{\sin(30° - 6{,}5°)} = 2{,}11$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\left(M_{n,1}^2 - 1\right) = 1 + \frac{2 \cdot 1{,}4}{1{,}4 + 1}(1{,}2^2 - 1) = 1{,}513$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_{n,1}^2}{2 + (\gamma - 1)M_{n,1}^2} = \frac{(1{,}4 + 1) \cdot 1{,}2^2}{2 + (1{,}4 - 1) \cdot 1{,}2^2} = 1{,}3416$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1{,}513}{1{,}3416} = 1{,}128$$

Provjera pomoću tablica za normalni udarni val, Appendix 8, za

$M_{n,1} = 1.2$ slijedi da je $M_{n,2} = 0{,}8422$

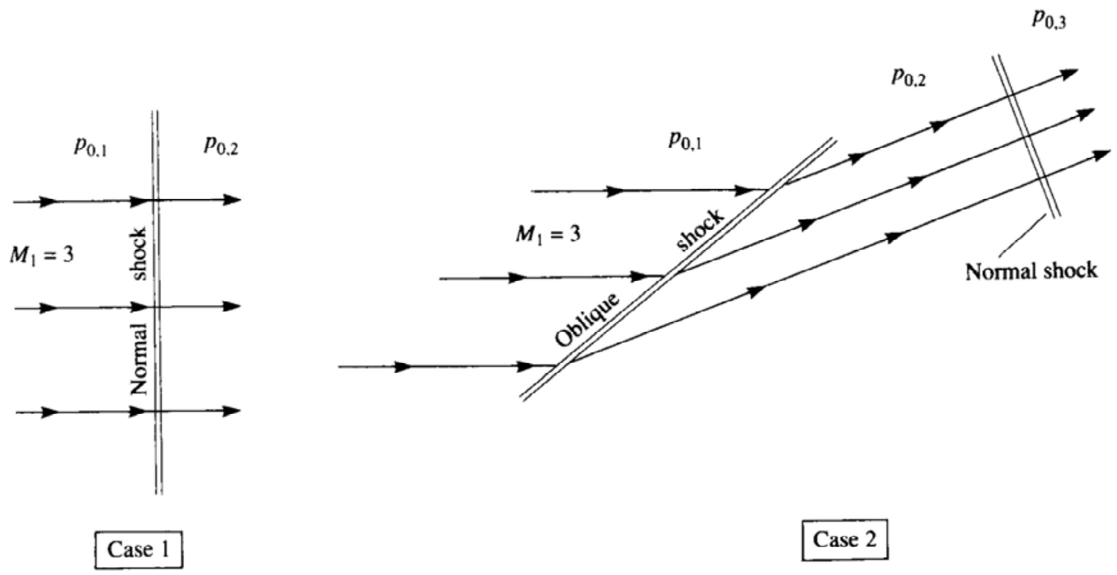
$$\frac{p_2}{p_1} = 1{,}513$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1{,}128$$

5.4 **Promatra se struja zraka brzine M_1 = 3 koju je potrebno usporiti na podzvučnu brzinu. Promatramo dva različita načina kako bi to postigli:**

(1) struju zraka usporavamo kroz normalni udarni val

(2) struja zraka najprije prolazi kroz kosi udarni val sa 40° kutom vala, a zatim kroz normalni udarni val. Odrediti omjer konačnih zaustavnih tlakova iza normalnog udarnog vala za slučaj br. 2 i zaustavnog tlaka iza normalnog udarnog vala za prvi slučaj. Komentiraj rezultate.



Rješenje:

Za slučaj (1)

$M_1 = 3$

Tablica iz App. B

$$\left(\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}\right)_1 = 0.3283$$

Za slučaj (2)

$M_1 = 3 \quad i \quad \beta = 40°$

$M_{n,1} = M_1 \sin\beta = 3 \cdot \sin 40° = 1.93$

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + [(\kappa - 1)/2]M_{n,1}^2}{\kappa M_{n,1}^2 - (\kappa - 1)/2} = \frac{1 + [(1{,}4 - 1)/2] \cdot 1{,}93^2}{1{,}4 \cdot 1{,}93^2 - (1{,}4 - 1)/2} = 0{,}348$$

$M_{n,2} = 0{,}589$

Iz App. B moguće je odrediti za $M_{n,1} = 1.93$ interpolacijom:

$$\left(\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}\right)_2 = 0.753 \quad i \quad M_{n,2} = 0{,}588$$

$$\tan\theta = 2\cot\beta \frac{M_1^2 \sin^2\beta - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2} = 2\cot 40° \frac{3^2 \cdot \sin^2 40° - 1}{3^2 \cdot (1{,}4 + \cos 80°) + 2} = 0{,}4009$$

$\theta = 21{,}85°$

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0{,}589}{\sin(40° - 21{,}85°)} = 1{,}89$$

Za struju zraka sa $M_2 = 1{,}89$ iz tablica za normalni udarni val slijedi da je:

$$\left(\frac{p_{0,3}}{p_{0,2}}\right)_2 = 0.77195$$

Ukupno smanjenje zaustavnog tlaka u slučaju br. 2 jednako je:

$$\left(\frac{p_{0,3}}{p_{0,1}}\right)_2 = \left(\frac{p_{0,3}}{p_{0,2}}\right)_2 \left(\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}\right)_2 = 0.77195 \cdot 0.753 = 0.5813$$

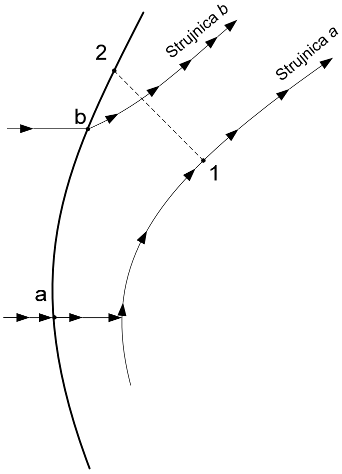
Konačno:

$$\frac{\left(\frac{p_{0,3}}{p_{0,1}}\right)_2}{\left(\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}\right)_1} = \frac{0.5813}{0.3283} = 1.77$$

Kranji ukupni tlak je 76% veći u slučaju višestrukih udarnih valova u usporedbi sa normalnim udarnim valom u slučaju br. 1. Zaustavni tlak je indikator koliko korisnog rada je moguće preuzeti iz neke struje zraka. Što je veći zaustavni tlak struja zraka ima veću iskoristivost. Manji gubitak zaustavnog tlaka znači veću iskoristivost struje zraka. U slučaju broj 2 imamo manje gubitke pri zaustavljanju struje zraka. Kada se smanji Ma broj ispred normalnog udarnog vala, tada su i gubici manji. Kosi udarni val u drugom slučaju služio je upravo tome. Primjena ovih karakteristika nadzvučne struje zraka vidljiva je pri projektiranju usisa zraka u mlazne motore nadzvučnih zrakoplova.

6 ZAOBLJENI UDARNI VAL, EKSPANZIJSKI VAL

6.1 **Promatramo odvojeni zaobljeni udarni val ispred dvodimenzionalnog paraboličnog tupog tijela (vidi sliku). brzina slobodne struje zraka je Ma = 8. Promatramo dvije strujnice koje prolaze kroz udarni val u točkama a i b kao na slici. Kut vala u točki a iznosi 90°, a u točki b 60°. Izračunaj i usporedi vrijednosti entropije relativno prema struji zraka za strujnice a i b u struji iza udarnog vala.**



Rješenje:

Neposredno iza zaobljenog udarnog vala u točki a moguće je odrediti karakteristike struje preko jednadžbi za normalni udarni val.

Tako imamo,

$M_{n,1} = 8$

Iz App. B za $M_{n,1} = 8$ slijedi da su:

$$\frac{p_2}{p_1} = 74.5$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 13.39$$

Porast entropije određuje se iz jednadžbe:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} = 1004{,}7 \quad \cdot \ln 13.39 - 287 \cdot \ln 74.5 = 1370 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}$$

S obzirom na poznatu činjenicu iz teorije udarnih valova prema kojoj je strujanje duž neke strujnice iza udarnog vala adijabatsko i bez trenja, odnosno izentropsko, slijedi da će promjena entropije biti konstantna duž čitave strujnice *a*.

Dakle, promjena entropije duž strujnice *a* $\Delta s_a = s_2 - s_1 = 1370\ \mathrm{J/kg\,K}$

Neposredno iza zaobljenog udarnog vala na mjestu b, gdje je $M_1 = 8 \quad i \quad \beta = 60°$

$M_{n,1} = M_1 \sin\beta = 8 \cdot \sin 60° = 6.928$

iz tablice u App. B za $M_{n,1} = 6.9$ moguće je odrediti

$$\frac{p_2}{p_1} = 55.38$$

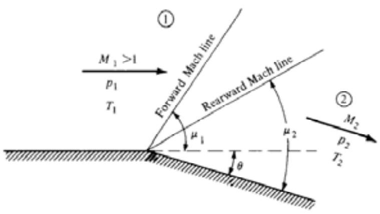
$$\frac{T_2}{T_1} = 10.2$$

Dakle na mjestu *b* i duž strujnice *b*,

$$\Delta s_b = s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} = 1004{,}7 \ \cdot \ln 10.2 - 287 \cdot \ln 55.38 = 1181\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$$

Promjena entropije duž *b* strujnice manja je nego duž *a* strujnice jer strujnica *b* prolazi kroz slabiji dio zaobljenog udarnog vala.

6.2 **Nadzvučno strujanje sa $M_1 = 1.5, p_1 = 1.01\ \mathrm{bar}\ i\ T_1 = 288\ \mathrm{K}$ ekspandira oko oštrog vrha kroz kut otklona od 15°. Izračunaj $\boldsymbol{M_2},\ \boldsymbol{p_2, T_2, p_{0,2}\ i\ T_{0,2}}$ i kutove ispred i iza Ma linija s obzirom na smjer struje zraka iza udarnog vala.**



Rješenje:

$M_1 = 1.5$

Prandtl-Mayerova funkcija

$$\nu_1(M_1) = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(M_1^2-1)} - \tan^{-1}\sqrt{M_1^2-1}$$

$$= \sqrt{\frac{2.4}{0.4}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{0.4}{2.4}(1.5^2-1)} - \tan^{-1}\sqrt{1.5^2-1} = 11.91°$$

$\nu_2 = \nu_1 + \theta = 11.91° + 15° = 26.91°$

Iz tablice App. C (Prandtl-Mayerova funkcija i Ma kut) za $\nu_2 = 26.91°$ slijedi da je $M_2 = 2$

Omjere tlakova moguće je odrediti iz tablice App. A;

$\boxed{M_1 = 1.5}$

$$\frac{p_{0,1}}{p_1} = 3.671$$

$$\frac{T_{0,1}}{T_1} = 1.45$$

$\boxed{M_2 = 2}$

$$\frac{p_{0,2}}{p_2} = 7.824$$

$$\frac{T_{0,2}}{T_2} = 1.8$$

S obzirom da je struja zraka izentropska slijedi da je $T_{0,2} = T_{0,1}$ i $p_{0,2} = p_{0,1}$

$$p_2 = \frac{p_2}{p_{0,2}} \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \frac{p_{0,1}}{p_1} p_1 = \frac{1}{7.824} \cdot 1 \cdot 3.671 \cdot 1.01 = 0.4739 \text{ bar}$$

$$T_2 = \frac{T_2}{T_{0,2}} \frac{T_{0,2}}{T_{0,1}} \frac{T_{0,1}}{T_1} T_1 = \frac{1}{1.8} \cdot 1 \cdot 1.45 \cdot 288 = 232 \text{ K}$$

$$p_{0,2} = p_{0,1} = \frac{p_{0,1}}{p_1} p_1 = 3.671 \cdot 1.01 = 3.708 \text{ bar}$$

$$T_{0,2} = T_{0,1} = \frac{T_{0,1}}{T_1} T_1 = 1.45 \cdot 288 = 417.6 \text{ K}$$

Kut prednje Ma linije $= \mu_1 = 41.81°$

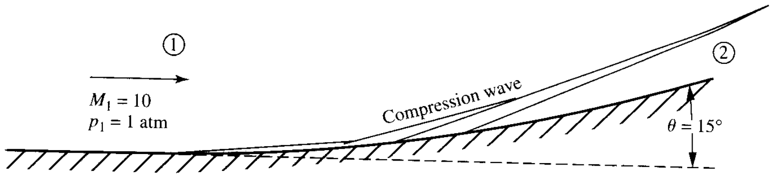
Kut zadnje Ma linije $= \mu_2 - \theta = 30 - 15 = 15°$

$$\mu_1 = \arcsin \frac{1}{M_1}$$

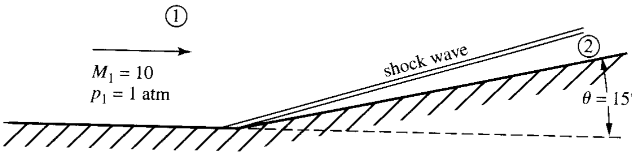
6.3 **Promatramo strujanje zraka čija je brzina i tlak $M_1 = 10$ i $p_1 = 1.01$ bar. Izračunajte Ma broj i tlak u slučaju:**

a) postepenog kompresijskog zakretanja kroz ukupni kut od 15° (Prandtl-Mayerova kompresija)

b) kompresiju preko oštrog kuta od 15° (kosi udarni val)



(*a*) Isentropic compression corner



(*b*) Shock compression corner

Rješenje:

a) izentropsko strujanje, PM kompresija

Iz tablice App. C za $M_1 = 10 \quad \rightarrow \quad \nu_1 = 102.3°$ slijedi da je

$\nu_2 = \nu_1 - \theta = 102.3° - 15° = 87.3°$

Iz tablice App. C za $\nu_2 = 87.3°$ slijedi da je $\boxed{M_2 = 6.4}$

Iz App. A, za $M_1 = 10, \qquad p_{0,1}/p_1 = 0.4244 \times 10^5$

$M_2 = 6.4, \qquad p_{0,2}/p_2 = 0.2355 \times 10^4$

$p_{0,1} = p_{0,2}$ za izentropsko strujanje

$$p_2 = \frac{p_2}{p_{0,2}} \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} \frac{p_{0,1}}{p_1} p_1 = \frac{1}{0.2355 \times 10^4} \cdot 1 \cdot 0.4244 \times 10^5 \cdot 1.01 = \boxed{18.2 \text{ bar}}$$

b) adijabatsko strujanje, kosi udarni val

Iz Dijagrama za karakteristike kosog udarnog vala $\theta - \beta - Ma$ (Slika 9.9, str.613.)

$za \quad M_1 = 10 \quad \text{i} \quad \theta = 15° \quad \rightarrow \quad \beta = 20°$

$M_{n,1} = M_1 \sin\beta = 10 \cdot \sin 20° = 3.42$

Iz tablice u App. B (normalni udarni val) za $M_{n,1} = 3.4$ moguće je odrediti

$$\frac{p_2}{p_1} = 13.32$$

$$p_2 = 13.32 \cdot 1.01 = \boxed{13.45\ \mathrm{bar}}$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = 0.2322$$

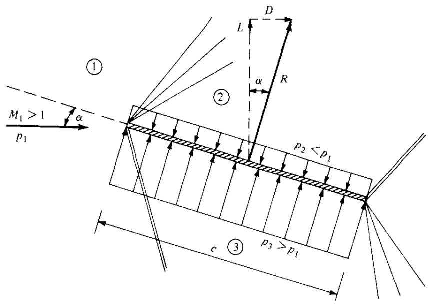
$$M_{n,2} = 0.4552$$

$$\theta = 15°$$

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0.4552}{\sin(20° - 15°)} = \boxed{5.22}$$

Izentropska kompresija je djelotvorniji proces jer su i Ma i tlak iza kompresijskog vala veći nego u slučaju kosog udarnog vala. Nedjelotvornost kosog udarnog vala mjeri se kroz gubitak ukupnog tlaka kroz kosi udarni val koji iznosi oko 77%

6.5 **Izračunaj koeficijente uzgona i otpora ravne pložu pod kutom od 5° u struji zraka brzine *Ma* = *3*.**



Rješenje:

Da bi odredili sile na ploču potrebno je izračunati omjer tlakova p_2/p_1 na gornjoj površini i omjer p_3/p_1 na donjoj površini.

$\nu_2 = \nu_1 + \theta$

$\theta = \alpha = 5°$

Iz App. C za $M_1 = 3 \rightarrow \nu_1 = 49.76°$

$\nu_2 = 49.76° + 5° = 54.76°$

Iz App. C slijedi da je za $\nu_2 = 54.76° \rightarrow M_1 = 3.27$

Iz App. A, za $M_1 = 3,\ p_{0,1}/p_1 = 36.73$

$M_2 = 3.27,\ p_{0,2}/p_2 = 55$

$p_{0,1} = p_{0,2}$ za izentropsko strujanje

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_{0,1}}{p_1} \Big/ \frac{p_{0,2}}{p_2} = \frac{36.73}{55} = 0.668$$

Omjer tlakova na donjoj površini p_3/p_1

Iz dijagrama karakteristika kosog udarnog vala $\theta - \beta - Ma$ za $M_1 = 3$ i $\theta = 5° \rightarrow \beta = 23.1°$

$M_{n,1} = M_1 \sin\beta = 3 \cdot \sin 23.1° = 1.177$

Iz App. B za $M_{n,1} = 1.177 \rightarrow p_3/p_1 = 1.458$

$L' = (p_3 - p_2) c \cos\alpha$

$$c_l = \frac{L'}{q_1 S} = \frac{L'}{(\kappa/2) p_1 M_1^2 c} = \frac{2}{\kappa M_1^2}\left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}\right)\cos\alpha = \frac{2}{1.4 \cdot 3^2}(1.458 - 0.668)\cos 5° = 0.125$$

$$D' = (p_3 - p_2) c \sin\alpha$$

$$c_d = \frac{D'}{q_1 S} = \frac{D'}{(\kappa/2) p_1 M_1^2 c} = \frac{2}{\kappa M_1^2}\left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}\right)\sin\alpha = \frac{2}{1.4 \cdot 3^2}(1.458 - 0.668)\sin 5° = 0.011$$

ili

$$\frac{c_d}{c_l} = \tan\alpha$$

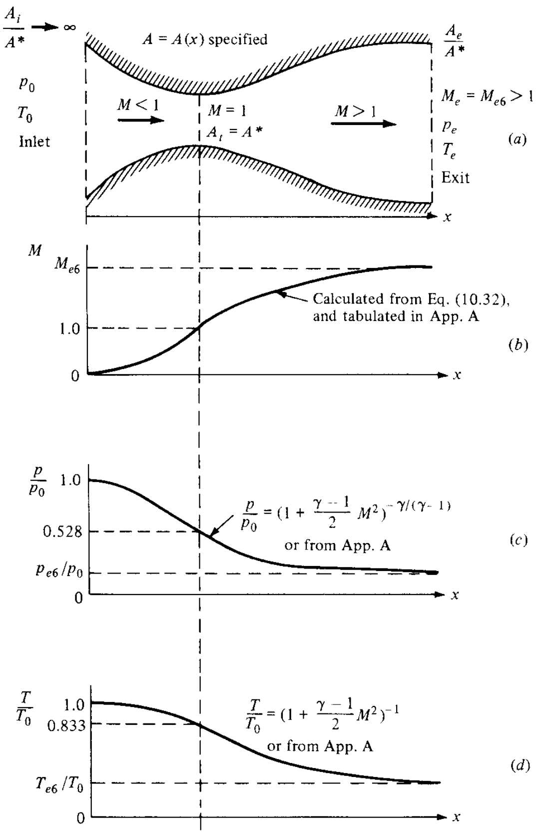
$$c_d = c_l \tan\alpha = 0.125 \cdot \tan 5° = 0.011$$

7 STLAČIVO STRUJANJE KROZ MLAZNICE, DIFUZORE I AERODINAMIČKE TUNELE

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1)\frac{du}{u}$$

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left[\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

7.1 **Promatramo izentropsko nadzvučno strujanje kroz konvergentno-divergentnu mlaznicu sa omjerom površine izlaza prema grlu 10.25. Tlak u rezervoaru i temperatura su 5.05 bar i 333 K. Izračunajte *M, p* i *T* na izlazu mlaznice.**



7.2

Figure 10.10 Isentropic supersonic nozzle flow.

Rješenje:

Iz App. A (izentropsko strujanje) za $A_e/A^* = 10.25$

$$M_e = 3.95 \qquad \frac{p_e}{p_0} = \frac{1}{142} \qquad \frac{T_e}{T_0} = \frac{1}{4.12}$$

$$p_e = \frac{5.05}{142} = 0.0387 \text{ bar}$$

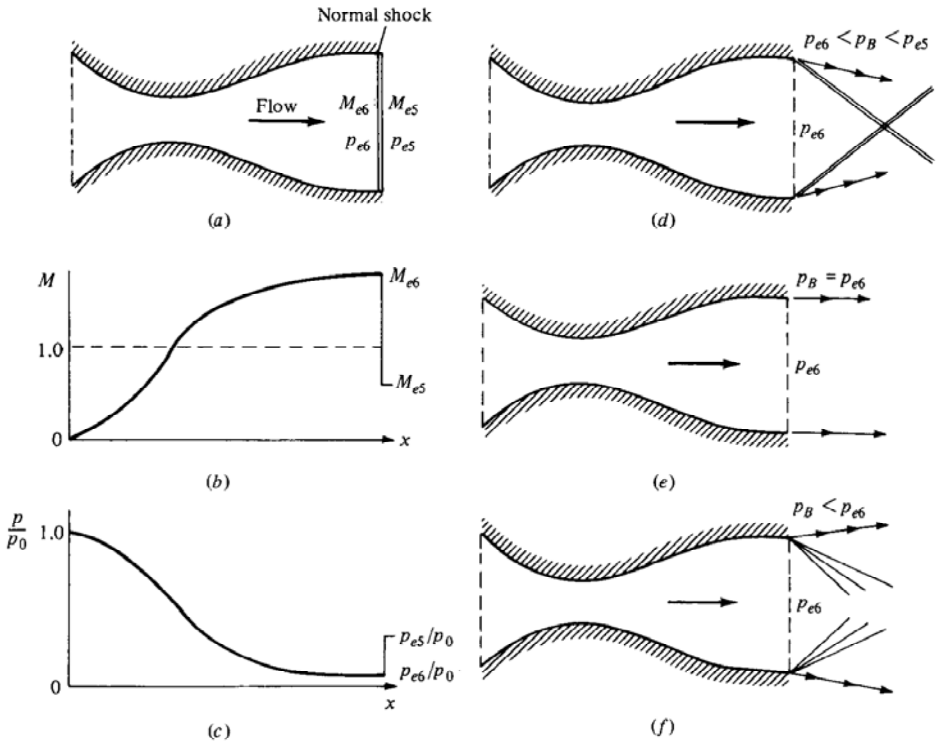
$$T_e = \frac{333}{4.12} = 80.3 \text{ K}$$

7.1 **Promatramo izentropsko nadzvučno strujanje kroz konvergentno-divergentnu mlaznicu sa omjerom površine izlaza prema grlu 2. Tlak u rezervoaru i temperatura su 1.01 bar i 288 K. Izračunajte *M*, *p*, *T* u grlu i na izlazu iz mlaznice za slučajeve kada je:**

a) strujanje nadzvučno na izlazu

b) strujanje je podzvučno kroz cijelu mlaznicu osim u grlu gdje je *M* = 1.

c) izlazni tlak jednak $p_e = 0.983\ \text{bar}$



Rješenje:

a) U grlu je strujanje sonično,

$$M_t = 1$$

$$p_t = p^* = \frac{p^*}{p_0} p_0 = 0.528 \cdot 1.01 = 0.5333\ \text{bar}$$

$$T_t = T^* = \frac{T^*}{T_0} T_0 = 0.833 \cdot 288 = 240\ \text{K}$$

Na izlazu je strujanje nadzvučno. Za $A_e/A^* = 2$ iz App. A (izentropsko strujanje) slijedi:

$$M_e = 2.2 \qquad \frac{p_e}{p_0} = \frac{1}{10.69} \qquad \frac{T_e}{T_0} = \frac{1}{1.968}$$

$$p_e = \frac{1.01}{10.69} = 0.0945 \text{ bar}$$

$$T_e = \frac{288}{1.968} = 146{,}3 \text{ K}$$

b) U grlu je strujanje i dalje sonično, pa vrijedi prema prethodnom izračunu da su:

$M_t = 1$ $\quad p_t = 0.5333 \text{ bar}$ $\quad T_t = 240 \text{ K}$

Međutim, na svim ostalim mjestima u mlaznici strujanje je podzvučno, pa iz App. A za $A_e/A^* = 2$ (dio za podzvučno strujanje) slijedi:

$M_e = 0.3$ $\quad \frac{p_e}{p_0} = \frac{1}{1.064}$ $\quad \frac{T_e}{T_0} = \frac{1}{1.018}$

$$p_e = \frac{1.01}{1.064} = 0.949 \text{ bar}$$

$$T_e = \frac{288}{1.018} = 282.9 \text{ K}$$

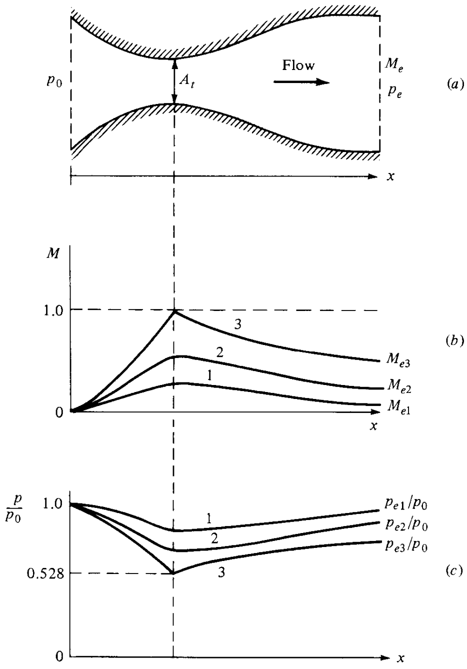


Figure 10.11 Isentropic subsonic nozzle flow.

c) U trenutku kada $p_e = 0.949$ bar strujanje u grlu je sonično, ali u svim ostalim dijelovima podzvučno.

Iz toga slijedi da je $p_{e,3} = p_e = 0.949$ bar.

Ako pretpostavimo da je tlak na izlazu iz mlaznice jednak $p_e = 0.983$ bar, što je veće od graničnog $p_{e,3}$, slijedi da je strujanje kroz cijelu mlaznicu podzvučno uključujući i grlo. A^* je referentna vrijednost, a A_t stvarna vrijednost površine mlaznice.

$$\frac{p_0}{p_e} = \frac{1.01}{0.983} = 1.028$$

Za taj omjer je iz podzvučnog dijela App. A:

$M_e = 0.2 \qquad i \qquad \frac{A_e}{A^*} = 2.964$

$$\frac{A_t}{A^*} = \frac{A_t}{A_e}\frac{A_e}{A^*} = 0.5 \cdot 2.964 = 1.482$$

Za omjer $A_t/A^* = 1.482$ je iz podzvučnog dijela App. A:

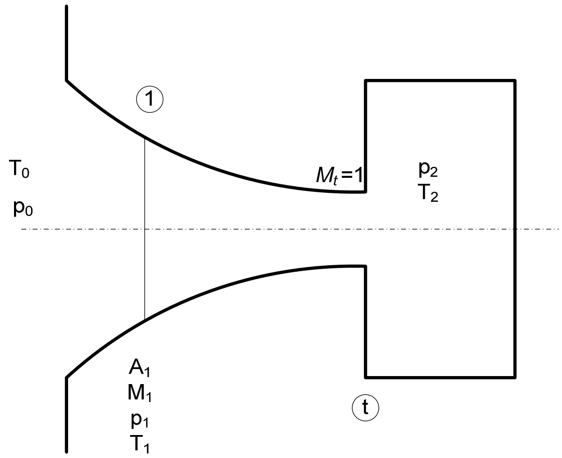
$M_t = 0.44$

7.3 **Zrak iz okoline struji kroz konvergentnu mlaznicu u spremnik u kojemu se održava tlak od 200 kPa. U presjeku 1 čija je površina 0.0012 m^2 tlak i temperatura su 400 kPa i 5 °C, a Ma broj je 0.52. Odredi:**

a) Ma broj u grlu mlaznice

b) maseni protok

c) površinu poprečnog presjeka grla



Rješenje:

$$p_0 = p_1\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 4\cdot\left(1+\frac{1.4-1}{2}\cdot 0.52^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 4.81 \text{ bar}$$

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{2}{4.81} = 0.416 \quad < \quad \frac{p^*}{p_0} = 0.528 \qquad \Leftrightarrow \text{"choked flow" iliti zasićeno strujanje}$$

$$M_t = 1$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \frac{p_1}{RT_1}a_1 M_1 A_1 = \frac{p_1}{RT_1}\sqrt{\kappa R T_1}M_1 A_1 = \frac{400000}{287\cdot 278.15}\sqrt{1.4\cdot 287\cdot 278.15}\cdot 0.52\cdot 0.0012$$
$$= 1.045 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_t V_t A_t$$

$$T_0 = T_1\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right) = 278.15\left(1+\frac{1.4-1}{2}\cdot 0.52^2\right) = 293.2 \text{ K}$$

$$T_\mathrm{t} = \frac{T_0}{1.2} = 0.8333\cdot T_0 = 0.8333\cdot 293.2 \ = 244.3 \text{ K}$$

$$p_t = 0.528\cdot p_0 = 0.528\cdot 4.81 = 2.541 \text{ bar}$$

$$\rho_\mathrm{t} = \frac{p_t}{RT_t} = \frac{2.54\cdot 10^5}{287\cdot 244.3} = 3.623 \text{ kg/m}^3$$

$$a_t = v_t = \sqrt{\kappa R T_t} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 244.3} = 313.3 \text{ m/s}$$

$$A_t = \frac{\dot{m}}{\rho_t V_t} = \frac{1.045}{3.623 \cdot 313.3} = 0.000921 \text{ m}^2$$

7.4 **Zrak iz struji kroz mlaznicu brzinom 200 m/s. Mlaznica ima površinu poprečnog presjeka na izlazu 0.7 m^2. Tlak i temperatura na izlazu iznose 101325 Pa i -73 °C. Odrediti na izlazu iz mlaznice:**

a) zaustavnu temperaturu

b) zaustavni tlak

c) maseni protok

d) Ma broj

Rješenje:

a)

$$\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)$$

$$T = 273.15 - 73 = 200.15 \text{ K}$$

$$a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 200.15} = 283.6 \text{ m/s}$$

$$M = \frac{V}{a} = \frac{200}{283.6} = 0.7052$$

$$T_0 = T\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right) = 200.15\left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \cdot 0.7052^2\right) = 220 \text{ K}$$

b)

$$p_0 = p\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 1.01 \cdot \left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \cdot 0.7052^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 1.41 \text{ bar}$$

c)

$$\dot{m} = \rho V A$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{1.01 \cdot 10^5}{287 \cdot 200.15} = 1.764 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m} = 1.764 \cdot 200 \cdot 0.7 = 247 \text{ kg/s}$$

d)

$$M_e = 0.7052$$

8 NADZVUČNI AERODINAMIČKI TUNELI

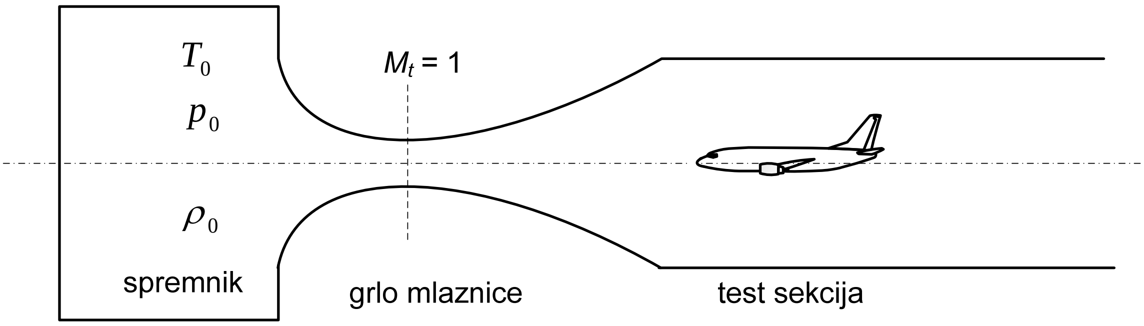
Poglavlje 10.5 (str. 698)

8.1 **Model zrakoplova nalazi se u test sekciji nadzvučnog aerotunela protočnog presjeka 3 m^2. Maksimalna brzina zrakoplova je Ma = 2. Radni fluid je zrak koji istječe iz spremnika u kojem je tlak 3 bara i temperatura 20°C. Odredi:**

a) uvjete u grlu DeLavalove mlaznice,

b) uvjete u test sekciji,

c) maseni protok zraka kroz tunel.



Rješenje:

Spremnik:

$$p_0 = 3 \text{ bar} = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 20\ °\text{C} = 20 + 273.15 = 293.15 \text{ K}$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{3 \cdot 10^5}{287 \cdot 293.15} = 3.565 \text{ kg/m}^3$$

Grlo mlaznice: $M_t = 1,\ V = a$

$$T_t = T^* = \frac{T_0}{1.2} = 0.8333 \cdot T_0 = 0.8333 \cdot 293.15 = 244.3 \text{ K}$$

$$p_t = p^* = 0.528 \cdot p_0 = 0.528 \cdot 3 = 1.585 \text{ bar}$$

$$\rho_t = \rho^* = 0.634 \cdot \rho_0 = 2.260 \text{ kg/m}^3$$

$$V^* = a^* = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T^*} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 244.3} = 313.3 \text{ m/s}$$

Test sekcija:

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \text{Ma}^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 3 \cdot \left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \cdot 2^2\right)^{\frac{-1.4}{1.4-1}} = 3.83 \text{ bar}$$

$$T = T_0\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{-1} = 293.15\cdot\left(1+\frac{1.4-1}{2}\cdot 2^2\right)^{-1} = 162.9\ \mathrm{K}$$

$$\rho = \rho_0\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} = 3.565\cdot\left(1+\frac{1.4-1}{2}\cdot 2^2\right)^{\frac{-1}{1.4-1}} = 0.820\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$a = \sqrt{\kappa\cdot R\cdot T} = \sqrt{1.4\cdot 287\cdot 162.9} = 255.8\ \mathrm{m/s}$$

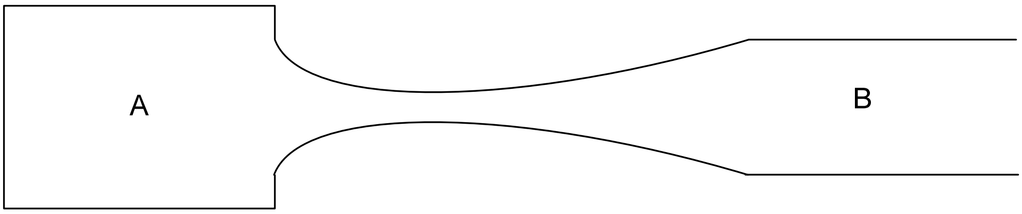
$$V = a\cdot\mathrm{Ma} = 255.8\ \cdot 2 = 511.6\ \mathrm{m/s}$$

$$\dot{m} = \rho\cdot V\cdot A = 0.820\ \cdot 511.6\cdot 3 = 1259\ \mathrm{kg/s}$$

8.2 **Zrak gustoće ρ_0, pod tlakom p_0, miruje ($V_0 = 0$) u spremniku A. Za aerodinamička mjerenja u prostoru B, koji ima poprečni presjek $A = 0.25\ \mathrm{m^2}$, potrebna su standardni uvjeti na razini mora i brzina $\mathrm{Ma} = 2$.**

a) Koliki treba biti poprečni presjek grla mlaznice i protok kroz mlaznicu?

b) Koliki treba biti tlak p_0 u spremniku ?



Rješenje:

a)

$$M_e = 2$$

$$A_t = A^*$$

$$\left(\frac{A_e}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M_e^2}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right) = \left(1+\frac{1.4-1}{2}2^2\right) = 1.8$$

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{1.4+1}{1.4-1} = 6$$

$$\left(\frac{A_e}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{2^2}\left[\frac{2}{1.4+1}\cdot 1.8\right]^6 = 2.85$$

$$\frac{A_e}{A^*} = \sqrt{2.85} \qquad \to A^* = \frac{A_e}{\sqrt{2.85}} = \frac{0.25}{\sqrt{2.85}} = 0.148\ \ \mathrm{m^2}$$

$\dot{m} = \rho_e \cdot V_e \cdot A_e = 1.225 \ \cdot 2 \cdot 340 \cdot 0.25 = 208 \ \text{kg/s}$

b)

$$p_0 = p_e \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 101325 \cdot (1.8)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 7.928 \cdot 10^5 \ \text{Pa}$$

$$T_0 = T_e \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_e^2\right) = 288.15 \cdot 1.8 = 518.7 \ \text{K}$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{7.928 \cdot 10^5}{287 \cdot 518.7} = 5.326 \ \text{kg/m}^3$$

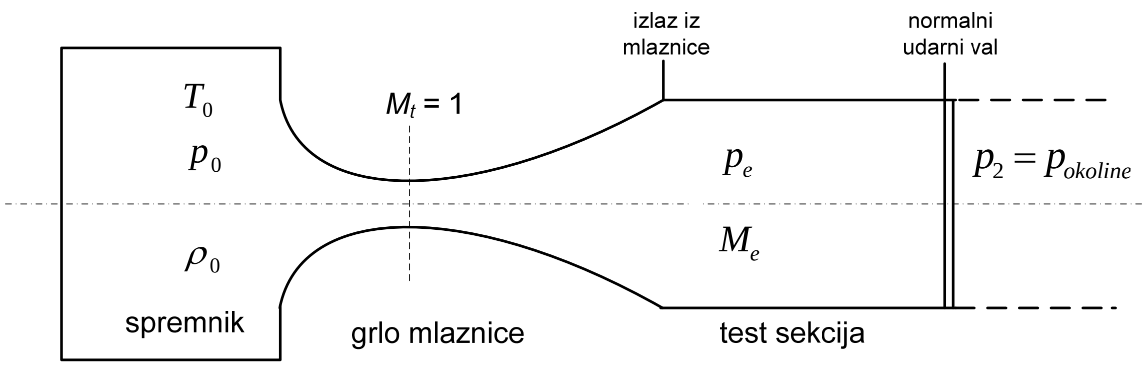
8.3 **Nadzvučni aerodinamički tunel skiciran je na slici. Temperatura zraka u spremniku je 1000 K. U okolini vlada standardni atmosferski tlak. Maseni protok kroz tunel je 120 kg/s. Ako je u testnoj sekciji potrebno ostvariti brzinu struje zraka Ma = 3, izračunaj:**

a) brzinu u grlu mlaznice

b) brzinu na izlazu testne sekcije

c) površinu grla mlaznice i

d) površinu izlaznog presjeka



Rješenje:

Za $M_e = 2$ slijedi da je

$$\left(\frac{A_e}{A^*}\right)^2 = \frac{1}{M_e^2}\left[\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = \frac{1}{3^2}\left[\frac{2}{1.4 + 1}\left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} 3^2\right)\right]^{\frac{1.4+1}{1.4-1}} = 17.93$$

$$\frac{A_e}{A^*} = 4.23$$

$$T_t = T^* = \frac{T_0}{1.2} = 0.8333 \cdot T_0 = 0.8333 \cdot 1000 \ \ = 833 \ \ \text{K}$$

$V^* = a^* = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T^*} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 833} = 578.5 \text{ m/s}$

b) Iz tablica za normalni udarni val, moguće je odrediti omjer tlakova iza i ispred normalnog udarnog vala za poznati Ma broj ispred normalnog udarnog vala.

Za $M_e = 2$ slijedi da je $p_2/p_e = 10.33$

$$p_e = p_2 \frac{p_e}{p_2} = \frac{101325}{10.33} = 9809 \text{ Pa}$$

$M_2 = 0.4752$

$$T_e = T_0 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_e^2\right)^{-1} = 1000 \cdot 0.5556 = 555.6 \text{ K}$$

$$a_e = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_e} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 555.6} = 472.5 \text{ m/s}$$

$$V_e = a_e \cdot M_e = 472.5 \cdot 3 = 1417.4 \text{ m/s}$$

$$\frac{T_2}{T_e} = 2.679$$

$$T_2 = 2.679 \cdot 555.6 = 1488 \text{ K}$$

$$a_2 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 1488} = 773 \text{ m/s}$$

$$V_2 = a_2 \cdot M_2 = 773 \cdot 0.4752 = 367.5 \text{ m/s}$$

c)

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = \frac{9809}{287 \cdot 555.6} = 0.0615 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m} = \rho_e \cdot V_e \cdot A_e$$

$$A_e = \frac{\dot{m}}{\rho_e \cdot V_e} = \frac{120}{0.0615 \cdot 1417.4} = 1.377 \text{ m}^2$$

$$\frac{A_e}{A^*} = 4.23$$

$$A^* = \frac{A_e}{4.23} = \frac{1.377}{4.23} = 0.325 \text{ m}^2$$

9 STLAČIVO STRUJANJE PREKO AEROPROFILA

Poglavlje 11 (11.1-11-3; str. 711 – 722)

9.1 **Klinasti dvostrukosimetrični aeroprofil prema slici nalazi se u nadzvučnoj struji zraka. Egzaktnim proračunom odrediti:**

a) koeficijent uzgona i silu uzgona po jedinici raspona

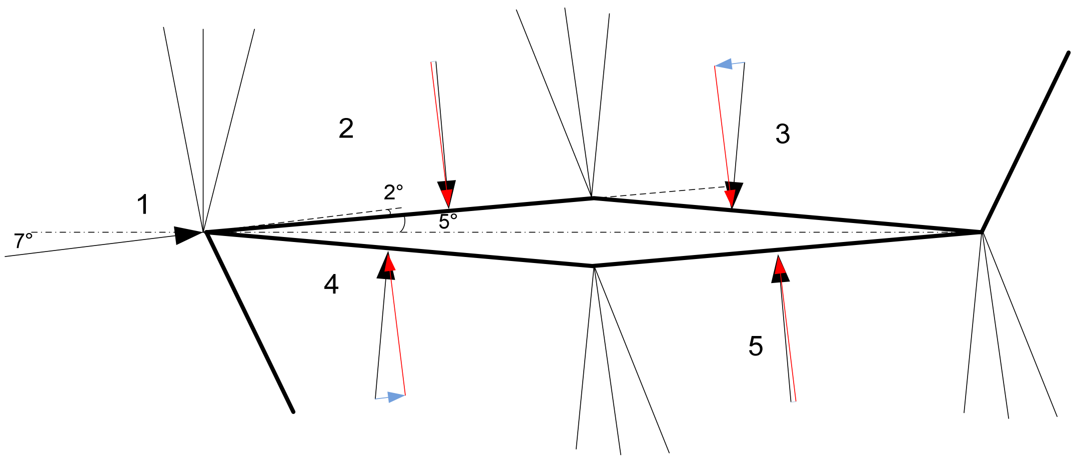
b) koeficijent valnog otpora i silu otpora po jedinici raspona

c) skicirati raspored tlaka na aeroprofilu.

Podaci:

$Ma_\infty = 1{,}6$	$t_\infty = -20\ ^\circ\mathrm{C}$	$c = 2$ m
$\alpha = 7\ ^\circ$	$p_\infty = 0{,}7$ bar	$\delta = 5\ ^\circ$

Rješenje:



1 – 2 Prandtl-Mayerova ekspanzija

2 – 3 Prandtl-Mayerova ekspanzija

1 – 4 Kosi udarni val

4 – 5 Prandtl-Mayerova ekspanzija

1 – 2 Prandtl-Mayerova ekspanzija

Na prvoj gornjoj ploči nastaju Prandtl-Mayerovi ekspanzijski valovi kroz koje dolazi do porasta Ma broja.

$\theta = \alpha - \delta = 7 - 5 = 2°$

Prandtl-Mayerova funkcija:

$$\nu_1(M_1) = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(M_1^2-1)} - \tan^{-1}\sqrt{M_1^2-1}$$

$$= \sqrt{\frac{2.4}{0.4}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{0.4}{2.4}(1.6^2-1)} - \tan^{-1}\sqrt{1.6^2-1} = 14.86°$$

Provjera: iz App. C za $M_1 = 1.6 \;\; \rightarrow \;\; \nu_1 = 14.86°$

$\nu_2 = 14.86° + 2° = 16.86°$

Iz App. C slijedi da je za $\nu_2 = 16.86° \;\; \rightarrow \;\; M_2 = 1.67$

S obzirom da je strujanje kroz ekspanzijske valove izentropsko (odnosno, p_0 i T_0 su konstantni kroz valove) slijedi iz jednadžbi za izentropsko strujanje:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{p_2}{p_0}}{\frac{p_1}{p_0}} = \frac{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \left[\frac{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_1^2\right)}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_2^2\right)}\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left[\frac{(1+0.2\cdot 1.6^2)}{(1+0.2\cdot 1.67^2)}\right]^{\frac{1.4}{0.4}} = 0.9009$$

$p_1 = p_\infty = 0.7 \text{ bar}$

$p_2 = 0.9009 \cdot 0.7 = 0.6306 \text{ bar}$

Provjera: iz App. A, za $\left.\begin{matrix} M_1 = 1.6, \; p_{0,1}/p_1 = 4.25 \\ M_2 = 1.67, \; p_{0,2}/p_2 = 4.719 \end{matrix}\right\} \frac{p_2}{p_1} = 0.9006$

2 – 3 Prandtl-Mayerova ekspanzija

Na drugom dijelu ploče, opet se strujnice zraka šire tj. nastaju ekspanzijski valovi kroz koje dolazi do ponovnog pada tlaka zraka.

$\theta = 2\delta = 10°$

$\nu_3 = \nu_2 + \theta$

$\nu_2(M_2) = 16.86°$

$\nu_3 = 16.86° + 10° = 26.86\ °C$

Iz App. C slijedi da je za $\nu_3 = 26.86° \quad \rightarrow \quad M_3 = 2.02$

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{\frac{p_3}{p_0}}{\frac{p_2}{p_0}} = \frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_3^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \left[\frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2\right)}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_3^2\right)}\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left[\frac{(1 + 0.2 \cdot 1.67^2)}{(1 + 0.2 \cdot 2.02^2)}\right]^{\frac{1.4}{0.4}} = 0.5845$$

$p_2 = 0.6306\ \mathrm{bar}$

$p_3 = 0.5845 \cdot 0.6306 = 0.3686\ \mathrm{bar}$

1 – 2	**2 – 3**
$\theta = 2°$	$\theta = 10°$
M_1=1.6	M_2=1.67
$\nu_1(M_1) = 14.86°$	$\nu_2(M_2) = 16.86°$
$\nu_2 = \nu_1 + \theta = 14.86 + 2 = 16.86°$	$\nu_3 = \nu_2 + \theta = 16.86 + 10 = 26.86°$
$M_2 = 1.67$	$M_3 = 2.02$
$\frac{p_2}{p_1} = 0.9009$	$\frac{p_3}{p_2} = 0.5845$
$p_2 = 0.6306\ \mathrm{bar}$	$p_3 = 0.3686\ \mathrm{bar}$

1 – 4 Kosi udarni val

Na donjoj strani profila zrak iz područja 1 prolazi kroz kosi udarni val u područje 4.

Iz dijagrama ϑ-β-M slijedi:

$M_1 = 1.6 \quad i \quad \theta = 12° \quad \rightarrow \quad \beta = 55°$

$M_{n,1} = M_1 \sin\beta = 1.6 \cdot \sin 55° = 1.311$

iz tablice u App. B za $M_{n,1} = 1.311$ moguće je odrediti

$$\frac{p_4}{p_1} = 1.84$$

$$M_{n,4} = 0.781$$

$p_4 = 1.84 \cdot 0.7 = 1.288$ bar

$$M_4 = \frac{M_{n,4}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0.781}{\sin(55° - 12°)} = 1.145$$

4 – 5 Prandtl-Mayerova ekspanzija

$$\theta = 10°$$

$$M_4 = 1.145$$

$$\nu_5 = \nu_4 + \theta$$

Prandtl-Mayerova funkcija

$$\nu_4(M_4) = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(M_4^2 - 1)} - \tan^{-1}\sqrt{M_4^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{2.4}{0.4}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{0.4}{2.4}(1.145^2 - 1)} - \tan^{-1}\sqrt{1.145^2 - 1} = 2.270°$$

$$\nu_5 = 2.27° + 10° = 12.27°$$

Iz App. C slijedi da je za $\nu_5 = 12.27° \quad \rightarrow \quad M_5 = 1.51$

S obzirom da je strujanje kroz ekspanzijske valove izentropsko (odnosno, $p_0\ i\ T_0$ su konstantni kroz valove) slijedi iz jednadžbi za izentropsko strujanje:

$$\frac{p_5}{p_4} = \frac{\frac{p_5}{p_0}}{\frac{p_4}{p_0}} = \frac{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M_4^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M_5^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \left[\frac{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M_4^2\right)}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2}M_5^2\right)}\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left[\frac{(1 + 0.2 \cdot 1.145^2)}{(1 + 0.2 \cdot 1.51^2)}\right]^{\frac{1.4}{0.4}} = 0.6066$$

$p_4 = 1.288$ bar

$p_5 = 0.6066 \cdot 1.288 = 0.7813$ bar

1 – 4	**4 – 5**
$\theta = 12°$	$\theta = 10°$
M_1=1.6	$M_4 = 1.145$
$\beta = 55°$	$\nu_4(M_4) = 2.27°$
$M_{n,1} = M_1 \sin\beta = 1.6 \cdot \sin 55° = 1.311$	$\nu_5 = \nu_4 + \theta = 2.27 + 10 = 12.27°$
$M_4 = 1.145;\ M_{n,4} = 0.781$	$M_5 = 1.51$
$\frac{p_4}{p_1} = 1.84$	$\frac{p_5}{p_4} = 0.6066$
$p_4 = 1.288$ bar	$p_5 = 0.7813$ bar

Silu uzgona i otpora po jedinici raspona računamo:

$$l = \frac{c/2}{\cos\delta} = \frac{1}{\cos 5} \approx 1.00382 \text{ m}$$

$$L' = -L_2 - L_3 + L_4 + L_5 = -p_2 l \cos 2° - p_3 l \cos 12° + p_4 l \cos 12° + p_5 l \cos 2°$$

$$D = -D_2 - D_3 + D_4 + D_5$$

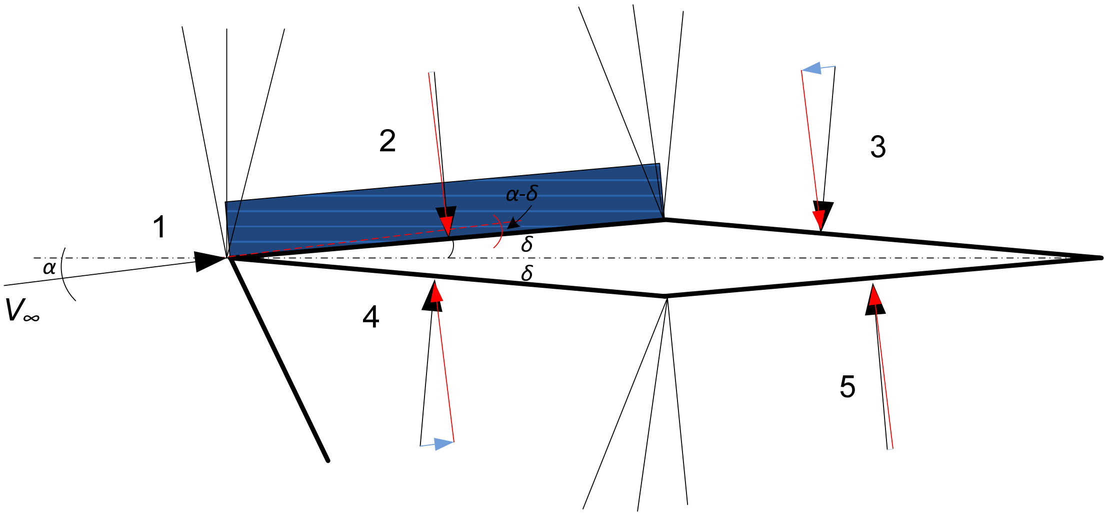
$$L' = (p_5 - p_2) l \cos 2° + (p_4 - p_3) l \cos 12° = 15.12 + 90.27 = 105.39 \text{ kN}$$

$$D' = (p_5 - p_2) l \sin 2° + (p_4 - p_3) l \sin 12° = 0.53 + 19.2 = 19.73 \text{ kN}$$

$$q_1 = \frac{\kappa}{2} p_1 M_1^2 = 0.7 \cdot 0.7 \cdot 10^5 \cdot 1.6^2 = 125440 \text{ Pa}$$

$$c_l = \frac{L}{q_1 S} = \frac{105.39}{125.44 \cdot 2} = 0.42$$

$$c_d = \frac{D}{q_1 S} = \frac{19.73}{125.44 \cdot 2} = 0.0786$$



1
2
3
4
5
α-δ
δ
δ
α
V∞

10 PRANDTL-GLAUERTOVA KOREKCIJA ZA STLAČIVOST

Poglavlje 11.4 i 11.5

10.1 **Na nekoj točki na površini aeroprofila, koeficijent tlaka iznosi -0.3 pri vrlo malim brzinama. Ako je brzina slobodne struje zraka Ma = 0.6, izračunaj *Cp* u toj točki.**

Rješenje:

$$C_{p0} = -0.3$$

$$C_p = \frac{C_{p0}}{\sqrt{1 - Ma^2}} = \frac{-0.3}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = -0.375$$

10.2 **Teoretski, koeficijent uzgona za tanki, simetrični aeroprofil u nestlačivoj truji zraka iznosi $c_l = 2\pi\alpha$. Izračunajte koeficijent uzgona pri *Ma∞* = 0.7.**

Rješenje:

$$c_l = \frac{c_{l,0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1 - 0.7^2}} = 8.8\alpha$$

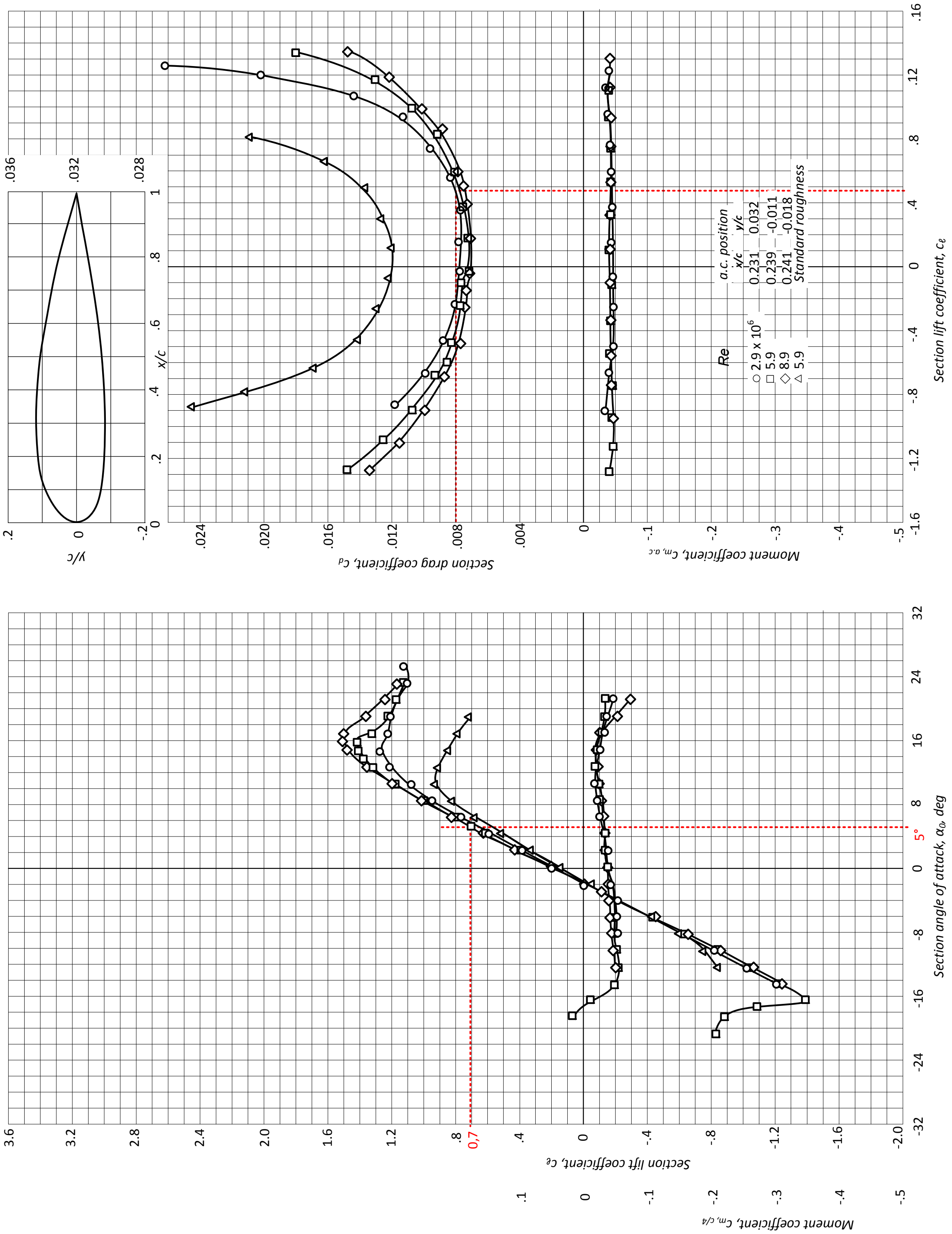
Utjecaj stlačivosti pri *Ma∞* = 0.7 je da povećava nagiba pravca koeficijenta uzgona za $8.8/2\pi = 1.4$, odnosno 40%.

10.3 **Izračunajte koeficijent uzgona za aeroprofil NACA 2421 pri $\alpha = 5°$ ako je brzina struje zraka jednaka *Ma∞* = 0.6.**

Rješenje:

$$c_l = \frac{c_{l,0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{0.7}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 0.875$$

NACA 2421


Section lift coefficient, cℓ
Section drag coefficient, cd
Moment coefficient, cm,a.c
Section angle of attack, α0, deg
Moment coefficient, cm,c/4
x/c
y/c
Re
○ 2.9 x 10^6
□ 5.9
◇ 8.9
△ 5.9
a.c. position
x/c y/c
0.231 0.032
0.239 -0.011
0.241 -0.018
Standard roughness
5°
0,7

10.4 **Aeroprofil se ispituje u podzvučnom aerotunelu. Brzina strujanja u test sekciji je 30.48 m/s, a vladaju uvjeti standardne atmosfere na razini mora. Ako je tlak u točki na aeroprofilu 100678.7 Pa, odredi koeficijent tlaka u toj točki. Ako se brzina poveća na 0.6 Ma, koliki je koeficijent tlaka?**

Rješenje:

$$C_{p0} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{100678.7 - 101325}{\frac{1}{2} \cdot 1.225 \cdot 30.48^2} = -1.136$$

$$C_p = \frac{C_{p0}}{\sqrt{1 - Ma^2}} = \frac{-1.136}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = -1.42$$

10.5 **Aeroprofil ima $\alpha_0 = -4°$. Na osnovu eksperimentalnih rezultata kod Ma = 0.16 koeficijent uzgona je $c_l = 0.3$ pri $\alpha = 1.5°$. Koliki je koeficijent uzgona kod $\alpha = 2.5°$ pri Ma = 0.65 prema Prandtl-Glauertovoj teoriji?**

Rješenje:

Pri malim napadnim kutovima Prandtl-Glauertova korekcija je:

$$c_l = \frac{c_{l,0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

$$\Delta c_l = \frac{\Delta c_{l,0}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta c_l}{\Delta \alpha} = \frac{\frac{\Delta c_{l,0}}{\Delta \alpha}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

$$c_{l\alpha} = \frac{a_0}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

$$(c_{l\alpha})_{M=0.16} = \frac{c_l}{\alpha_a} = \frac{c_l}{\alpha - \alpha_0} = \frac{0.3}{1.5 - (-4)} = 0.05455 \quad 1/°$$

$$a_0 = c_{l\alpha}\sqrt{1 - M_\infty^2} = 0.05455\sqrt{1 - 0.16^2} = 0.05385 \quad 1/°$$

$$(c_{l\alpha})_{M=0.65} = \frac{0.05385}{\sqrt{1 - 0.65^2}} = 0.07086 \quad 1/°$$

$$(c_l)_{M=0.65} = c_{l\alpha} a_a = c_{l\alpha}(a - a_0) = 0.07086 \cdot (2.5 - (-4)) = 0.461$$

11 KRITIČNI MACHOV BROJ

Poglavlje 11.6-11.9

Kritični Machov broj

Na najisturenijoj točki na aeroprofilu, koeficijent tlaka za slučaj nestlačivog strujanja iznosi -0,8. Odredi:

- **kritični Machov broj aeroprofila, grafički i numerički**
- **povećanje koeficijenta uzgona u odnosu na nestlačivo strujanje pri kritičnom Machovom broju**

Rješenje:

a) Kritični Machov broj aeroprofila

a1. Grafičko rješenje

$C_{p0} = -0{,}8$

$$C_p = \frac{C_{p0}}{\sqrt{1 - Ma^2}} = \frac{-0{,}8}{\sqrt{1 - Ma^2}} \qquad (1) \qquad \text{Prandtl – Glauertovo pravilo}$$

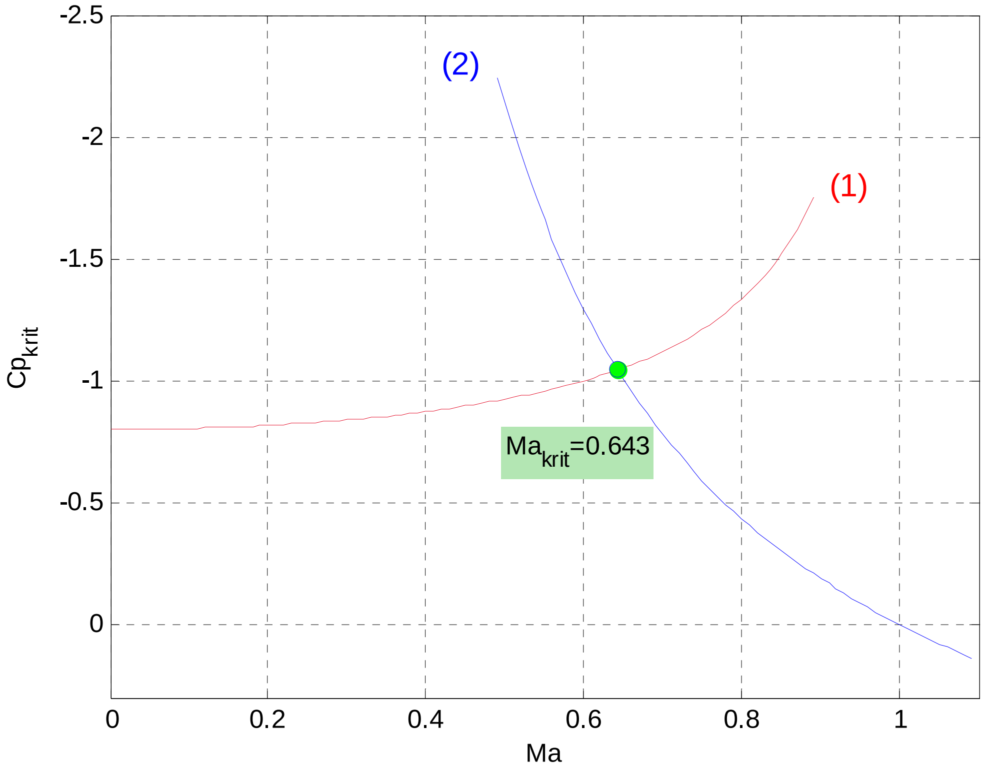
$$C_{p_{kr}} = \frac{2}{\kappa \cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2 + (\kappa - 1) \cdot Ma_{kr}^2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} - 1\right] \qquad (2)$$

$$C_{p_{kr}} = \frac{2}{1{,}4Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2 + (1{,}4 - 1) \cdot Ma_{kr}^2}{1{,}4 + 1}\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4 - 1}} - 1\right] = \frac{1}{0{,}7Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2 + 0{,}4Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5} - 1\right]$$

$$C_{p_{kr}} = \frac{1}{0{,}7 \cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2 + 0{,}4 \cdot Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5} - 1\right] \qquad (2^*)$$

$\boldsymbol{Ma_{kr}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$\boldsymbol{C_p}$ iz (1)	-0,8	-0,816	-0,873	-1	-1,333	-∞	-∞
$\boldsymbol{C_{p_{kr}}}$ iz (2*)	-∞	-16,313	-3,662	-1,294	-0,435	0	0,279

$Ma_{kr} = 0{,}643$ ... očitano iz grafa



a2. Numeričko rješenje

$$\frac{-0{,}8}{\sqrt{1-Ma_{kr}^2}}=\frac{1}{0{,}7\cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+0{,}4\cdot Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5}-1\right]$$

$$Ma_{kr}=\sqrt{-\frac{\sqrt{1-Ma_{kr}^2}}{0{,}56}\left[\left(\frac{2+0{,}4\cdot Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5}-1\right]}$$

i	Ma_{kr_i}	$Ma_{kr_{i+1}}$
1	0,8	0,4568
2	0,4568	0,7876
3	0,7876	0,4744
4	0,4744	0,7766
…	0,64	0,64595
	0,64596	0,64018
	0,642	0,644
	0,643	0,643

→ vrlo sporo konvergira

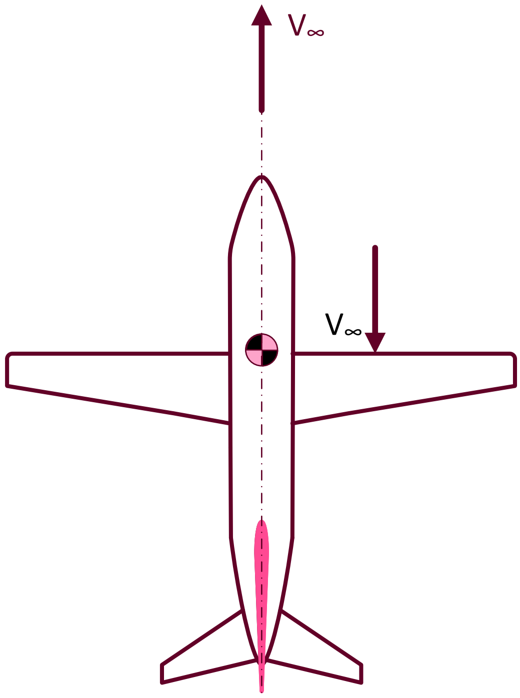
b) $$C_z=\frac{C_{z0}}{\sqrt{1-Ma_{kr}^2}}=\frac{C_{z0}}{\sqrt{1-0{,}643^2}}=1{,}306\cdot C_{z0}$$

$$\frac{C_z-C_{z0}}{C_{z0}}=\frac{1{,}306\cdot C_{z0}-C_{z0}}{C_{z0}}=0{,}306=30{,}6\ \%$$

10.2 **Usporedi brzine za tri različita zrakoplova (pravokutnih krila, kut strijele 15° i 45°) pri kojima opstrujavanje krila dostiže kritični Machov broj. Pretpostaviti da je krilo beskonačno tanka ravna ploča.**

-

Rješenje:



$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}04 \cdot 288{,}15} = 340{,}3\ \mathrm{m/s}$$

$$Ma_{kr} = 1$$

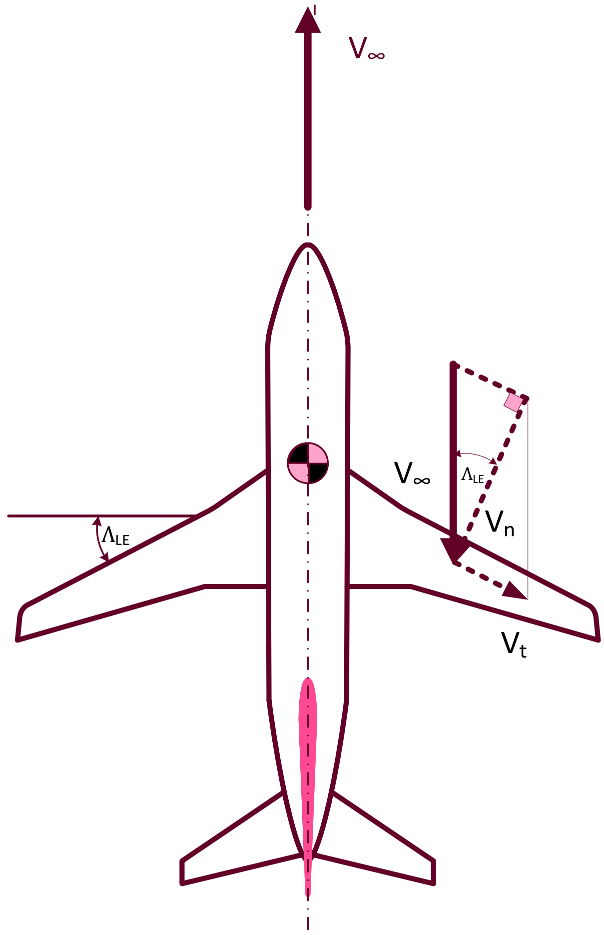
$$V_{\infty kr} = Ma_{kr} \cdot a = 340{,}3\ \ \mathrm{m/s}$$

$$V_{\infty kr} = 340{,}3\ \ \mathrm{m/s}$$

$$V_n = V_\infty \cos \Lambda_{\mathrm{LE}}$$

$$Ma_{kr} = \frac{V_{n\,kr}}{a} = \frac{V_{\infty kr} \cos \Lambda_{\mathrm{LE}}}{a}$$

$$V_{\infty kr} = \frac{Ma_{kr} \cdot a}{\cos \Lambda_{\mathrm{LE}}} = \frac{1 \cdot a}{\cos \Lambda_{\mathrm{LE}}} = \frac{a}{\cos \Lambda_{\mathrm{LE}}}$$



$$\boxed{\Lambda_{\mathrm{LE}} = 15^\circ}$$

$$V_{\infty kr} = \frac{340{,}3}{\cos 15^\circ} = 352{,}3\ \mathrm{m/s}$$

$$Ma_{\infty kr} = \frac{V_{\infty kr}}{a} = \frac{352{,}3}{340{,}3} = 1{,}035$$

$$\boxed{\Lambda_{\mathrm{LE}} = 45^\circ}$$

$$V_{\infty kr} = \frac{340{,}3}{\cos 45^\circ} = 481{,}2\ \mathrm{m/s}$$

$$Ma_{\infty kr} = \frac{V_{\infty kr}}{a} = \frac{481{,}2}{340{,}3} = 1{,}414$$

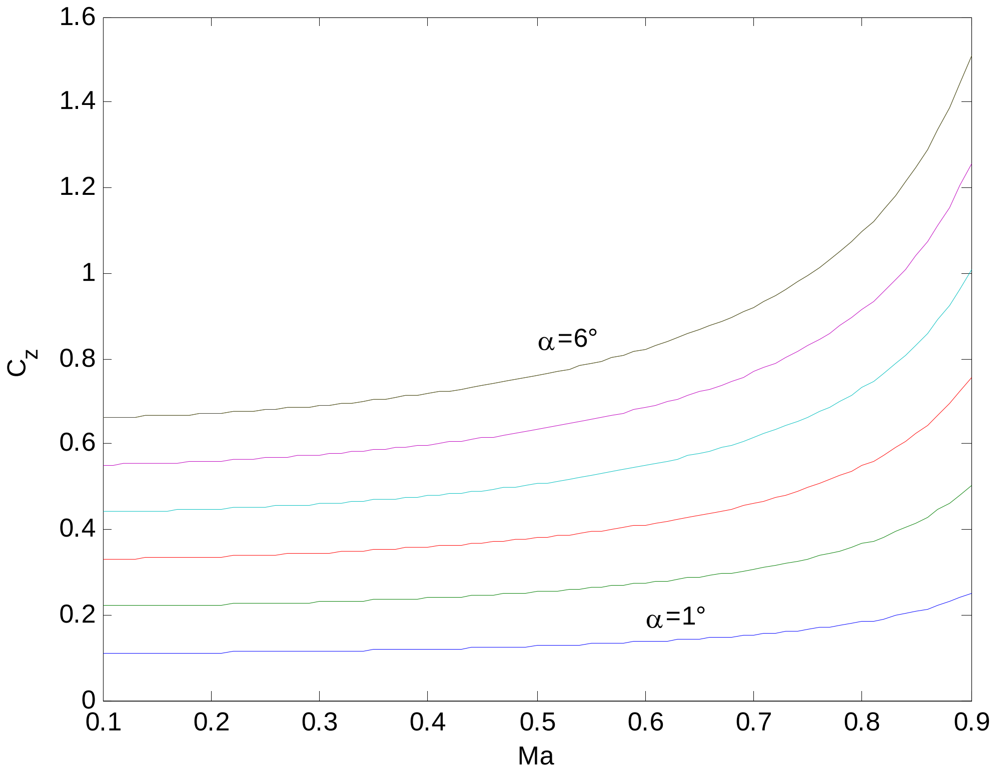
Teoretski koeficijent uzgona za tanki simetrični aeroprofil u nestlačivom strujanju iznosi $C_{z0} = 2\pi\alpha$. Izračunaj koeficijent uzgona za Machove brojeve 0,1, 0,3, 0,5, 0,7 i 0,9. **10.3**

Rješenje:

$$C_{z0} = 2\pi\alpha = 6{,}283\alpha$$

$$C_z = \frac{C_{z0}}{\sqrt{1 - Ma^2}} = \frac{6{,}283 \cdot \alpha}{\sqrt{1 - Ma^2}}$$

$\boldsymbol{Ma}$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\boldsymbol{C_z}$	$6{,}315\alpha$	$6{,}587\alpha$	$7{,}255\alpha$	$8{,}798\alpha$	$14{,}415\alpha$

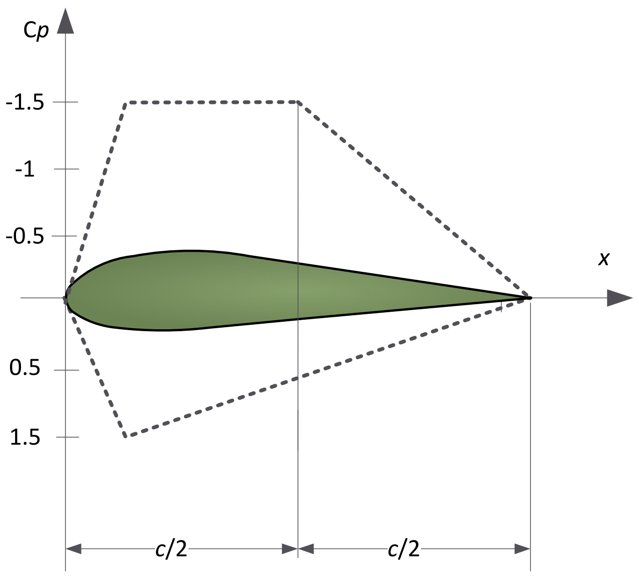


10.4

Za aeroprofil na slici dan je koeficijent tlaka kao na slici. Odrediti:

a) kritičnu vrijednost Ma broja

b) kritičnu brzinu kod leta na visini *h* = 2000 m



Rješenje:

$$C_{p_{kr}} = -1{,}5$$

$$C_{p_{kr}} = \frac{2}{\kappa \cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+(\kappa-1)\cdot Ma_{kr}^2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1\right]$$

$$C_{p_{kr}} = \frac{2}{1{,}4Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+(1{,}4-1)\cdot Ma_{kr}^2}{1{,}4+1}\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} - 1\right] = \frac{1}{0{,}7Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+0{,}4Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5} - 1\right]$$

$$-1{,}5 = \frac{1}{0{,}7\cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+0{,}4\cdot Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5} - 1\right]$$

$$Ma_{kr} = \sqrt{\frac{1}{-1.05}\left[\left(\frac{2+0{,}4\cdot Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5} - 1\right]}$$

i	Ma_{kr_i}	$Ma_{kr_{i+1}}$
1	0,5	0,596
2	0,596	0,559
3	0,559	0,575
4	0,568	0,571
5	0,571	0,570

$Ma_{kr} = 0{,}57$

$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}04 \cdot 275{,}15} = 332{,}5 \text{ m/s}$$

$$V_{kr} = Ma_{kr} \cdot a = 0.57 \cdot 332.5 = 189.5 \quad \text{m/s}$$

12 MJERENJE VISOKIH PODZVUČNIH I NADZVUČNIH BRZINA

Boeing 747 leti na visini 10000 m (barometarska visina). Temperatura je 15 °C iznad standardne, a Machov broj iznosi 0.85. Odredi: **12.1**

a) ekvivalentnu brzinu

b) zaustavni tlak na Pitot cijevi

c) kalibriranu brzinu očitanu s instrumenta na kojem je zanemaren utjecaj Ma broja

d) očitanje kalibrirane brzine na korektno kalibriranom intrumentu na razini mora

Rješenje:

Iz tablice standardne atmosfere na visini od 10 000 m temperatura i tlak zraka iznose,

$$\boldsymbol{T_{\mathrm{n}} = 223,15\ \mathrm{K}}$$
$$\boldsymbol{p_{\mathrm{n}} = 26431,3\ \mathrm{Pa}}$$
$$\boldsymbol{\rho_{\mathrm{n}} = 0,4126\ \mathrm{kg/m^3}}$$

$$R = 287{,}053\ \ \mathrm{J/kgK}$$

$$T\ [\mathrm{K}] = T_{\mathrm{n}}[°\mathrm{C}] + 223{,}15 \quad \rightarrow \quad T = t + 273{,}15 = 15 + 223{,}15 = 238{,}15\ \mathrm{K}$$

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{26431.3}{287.053 \cdot 238.15} = 0.3869\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{1.4 \cdot 287.053 \cdot 238.15} = 309.4\ \mathrm{m/s}$$

$$V = Ma \cdot a = 0.85 \cdot 309.4 = 263\ \mathrm{m/s}$$

a)

$$V_e = V\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = 263\sqrt{\frac{0.3869}{1.225}} = 147.8\ \ \mathrm{m/s}$$

b)

$$p_Z = p\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 26431{,}3 \cdot \left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \cdot 0.85^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 42\ 391\ \mathrm{Pa}$$

c)

$$p_Z = p + \frac{1}{2}\rho_0 V_{cal}^2$$

$$V_{cal}=\sqrt{\frac{2}{\rho_0}(p_Z-p)}=\sqrt{\frac{2}{1.225}(42\,391-26431{,}3)}=161.4\ \mathrm{m/s}$$

d)

$$V_{cal}=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(1+\frac{p_z-\mathrm{p}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}-1\right]}=\sqrt{\frac{2\cdot 1.4}{1.4-1}\cdot\frac{101325}{1.225}\left[\left(1+\frac{42\,391-26431{,}3}{101325}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}}-1\right]}$$

$$=157.2\ \mathrm{m/s}$$

$$V=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_Z-p)\frac{1}{1+\varepsilon(\mathrm{Ma})}}=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_Z-p)\frac{1}{1+\frac{1}{4}\mathrm{Ma}^2+\frac{1}{40}\mathrm{Ma}^4}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{0.3869}(42\,391-26431{,}3)\frac{1}{1+\frac{1}{4}\cdot 0.85^2+\frac{1}{40}\cdot 0.85^4}}=263\ \ \mathrm{m/s}$$

12.2 **Zrakoplov DC-10 leti na 12000 m, temperatura je 10°C ispod standardne, a Machov broj je 0,83. Odredi:**

a) ekvivalentnu brzinu

b) zaustavni tlak

c) kalibriranu brzinu

Rješenje:

Iz tablice standardne atmosfere na visini od 12 000 m temperatura i tlak zraka iznose,

$$\boldsymbol{T_{\mathrm{n}} = 216,15\ \mathrm{K}}$$

$$\boldsymbol{p_{\mathrm{n}} = 19330,1\ \mathrm{Pa}}$$

$$\boldsymbol{\rho_{\mathrm{n}} = 0,3108\ \mathrm{kg/m^3}}$$

$$R = 287{,}053\ \ \mathrm{J/kgK}$$

$$T\ [\mathrm{K}] = T_{\mathrm{n}} + t[\,°\mathrm{C}] \quad \rightarrow \quad T = 216{,}15 - 10 = 206{,}15\ \mathrm{K}$$

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{\mathbf{19330,1}}{287.053 \cdot 206{,}15} = 0.3267\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{1.4 \cdot 287.053 \cdot 206{,}15} = 287.8\ \mathrm{m/s}$$

$$V = Ma \cdot a = 0.83 \cdot 287.8 = 238.9\ \mathrm{m/s}$$

a)

$$V_e = V\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} = 238.9\sqrt{\frac{0.3267}{1.225}} = 123.4\ \ \mathrm{m/s}$$

b)

$$p_Z = p\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 19330{,}1 \cdot \left(1 + \frac{1.4 - 1}{2} \cdot 0.83^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 30\,369.5\ \mathrm{Pa}$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p}{\rho_0}\left[\left(1 + \frac{p_z - p}{p}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1\right]} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.4}{1.4 - 1} \cdot \frac{19330{,}1}{1.225}\left[\left(1 + \frac{30369.5 - 19330{,}1}{19330{,}1}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1\right]}$$

$$= 123.4\ \mathrm{m/s}$$

c)

$$V_{cal} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(1 + \frac{p_z - \mathrm{p}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.4}{1.4 - 1} \cdot \frac{101325}{1.225}\left[\left(1 + \frac{30369.5 - 19330{,}1}{101325}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1\right]}$$

$$= 131.8\ \mathrm{m/s}$$

$$V = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p}{\rho}\left[\left(1 + \frac{p_z - p}{p}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.4}{1.4 - 1} \cdot \frac{19330{,}1}{0.3267}\left[\left(1 + \frac{30369.5 - 19330{,}1}{19330{,}1}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1\right]}$$

$$= 238.9\ \mathrm{m/s}$$

Odredi Machov broj zrakoplova ako Pitot-cijev mjeri zaustavni tlak na SL:

a) 129291 Pa

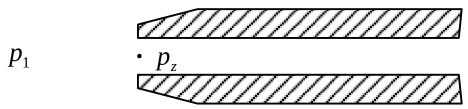
b) 275000 Pa

Rješenje:

$$p^* = p_0 \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0{,}528 \cdot p_0$$

$$p_0 = \frac{p^*}{0{,}528} = \frac{101325}{0{,}528} = 191903\ \mathrm{Pa}$$

a) podzvučni let

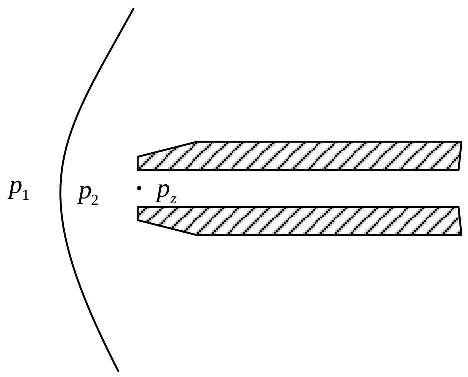


$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2}\mathrm{Ma}_\infty^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa-1}{2}\mathrm{Ma}_\infty^2$$

$$\mathrm{Ma}_\infty = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]} = \sqrt{\frac{2}{1.4-1}\left[\left(\frac{129291}{101325}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1\right]} = 0.6$$

b) nadzvučni let



$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(\mathrm{M}_1^2 - 1\right) \text{ ... omjer tlakova kroz normalni udarni val}$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_2} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\mathrm{M}_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \text{ ... izentropsko strujanje}$$

$$\mathrm{M}_2^2 = \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2}\mathrm{M}_1^2}{\kappa\mathrm{M}_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2}} = \frac{2 + (\kappa - 1)\mathrm{M}_1^2}{2\kappa\mathrm{M}_1^2 - (\kappa - 1)} \text{ ... iz relacija za normalni udarni val}$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_2} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot \frac{2 + (\kappa - 1)\mathrm{M}_1^2}{2\kappa\mathrm{M}_1^2 - (\kappa - 1)}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{(\kappa + 1)^2\mathrm{M}_1^2}{4\kappa\mathrm{M}_1^2 - 2(\kappa - 1)}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1}(\mathrm{Ma}_\infty^2 - 1) = \frac{\kappa + 1 + 2\kappa\mathrm{M}_1^2 - 2\kappa}{\kappa + 1} = \frac{1 - \kappa + 2\kappa\mathrm{M}_1^2}{\kappa + 1}$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \frac{p_{0,2}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{(\kappa + 1)^2\mathrm{M}_1^2}{4\kappa\mathrm{M}_1^2 - 2(\kappa - 1)}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot \frac{1 - \kappa + 2\kappa\mathrm{M}_1^2}{\kappa + 1} \ldots \mathit{Rayleigh\ Pitot\ formula}$$

$$\frac{275000}{101325} = \left(\frac{2.4^2\mathrm{M}_1^2}{4 \cdot 1.4 \cdot \mathrm{M}_1^2 - 0.8}\right)^{\frac{1.4}{0.4}} \cdot \frac{1 - 1.4 + 2.8 \cdot \mathrm{M}_1^2}{2.4}$$

$$2.714 = \left(\frac{2.4^2\mathrm{M}_1^2}{5.6\mathrm{M}_1^2 - 0.8}\right)^{3.5} \cdot (-0.167 + 1.167 \cdot \mathrm{M}_1^2)$$

$$2.714\left(\frac{2.4^2\mathrm{M}_1^2}{5.6\mathrm{M}_1^2 - 0.8}\right)^{-3.5} = -0.167 + 1.167 \cdot \mathrm{M}_1^2$$

$$1.167 \cdot \mathrm{M}_1^2 = 0.167 + 2.714\left(\frac{2.4^2\mathrm{M}_1^2}{5.6\mathrm{M}_1^2 - 0.8}\right)^{-3.5}$$

$$\mathrm{M}_1^2 = \frac{0.167}{1.167} + \frac{2.714}{1.167}\left(\frac{2.4^2\mathrm{M}_1^2}{5.6\mathrm{M}_1^2 - 0.8}\right)^{-3.5}$$

$$M_1 = \sqrt{0.143 + 2.326\left(\frac{0.72\mathrm{M}_1^2}{0.7\mathrm{M}_1^2 - 0.1}\right)^{-3.5}}$$

M_1	M_1
2	**1.414**
1.414	**1.330**
1.309	**1.309**

$M_1 = 1.3$

12.4 **Za mjerenje nadzvučne brzine izrađena je sonda koja ima poseban senzor za statički tlak, a posebno cjevčicu za zaustavni. Ako zrakoplov leti na nultoj nadmorskoj razini brzinom 2000 km/h pri standardnim uvjetima, odrediti:**

a) pokazivanje p_1

b) pokazivanje p_2

c) temperaturu T_2 u ustima cijevi

Rješenje:

$\boldsymbol{T_\infty = 216,15\ \mathrm{K}}$

$\boldsymbol{p_\infty = 19330,1\ \mathrm{Pa}}$

$\boldsymbol{\rho_\infty = 0,3108\ \mathrm{kg/m^3}}$

$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1.4 \cdot 287.053 \cdot 288{,}15} = 340.3\ \mathrm{m/s}$

$V = 2000\ \mathrm{km/h} = 555.6\ \mathrm{m/s}$

$$Ma = \frac{V}{a} = \frac{555.6}{340.3} = 1.63$$

a)

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\mathrm{Ma}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = (1 + 0.2 \cdot 1.63^2)^{3.5} = 4.44$$

$p_2 = 4.44 \cdot 101325 = 450305\ \mathrm{Pa}$

b)

$$\frac{T_2}{T_\infty} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2}\mathrm{Ma}^2 = 1 + 0.2 \cdot 1.63^2 = 1.531$$

$T_2 = 1.531 \cdot 288.15 = 441.3\ \mathrm{K}$

13 LINEARIZIRANO NADZVUČNO STRUJANJE

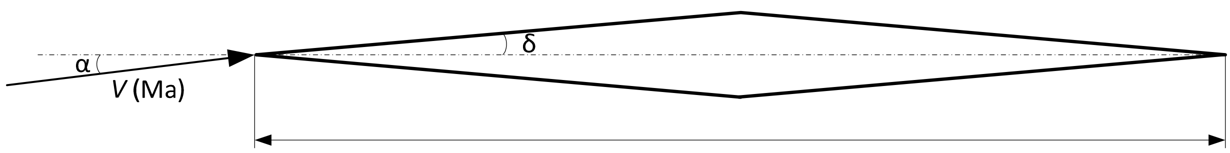
9.1 **Klinasti dvostrukosimetrični aeroprofil prema slici nalazi se u nadzvučnoj struji zraka. Linearnom teorijom aeroprofila u nadzvučnoj struji zraka odredi:**

a) koeficijent uzgona i silu uzgona po jedinici raspona

b) koeficijent valnog otpora i silu otpora po jedinici raspona

c) skicirati raspored tlaka na aeroprofilu.

Zadatak je potrebno riješiti pomoću koef. tlaka tlaka C_p u zavisnosti o kutu zakreta struje θ, te pomoću jednadžbi za C_L i C_D koje slijede iz C_p.

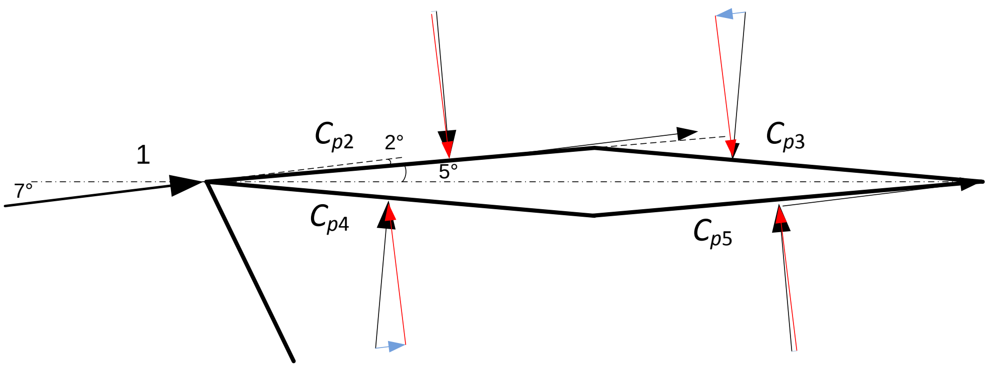


Podaci:

Ma_∞= 1,6	t_∞ = – 20 °C	c = 2 m
α = 7 °	p_∞ = 0,7 bar	δ = 5 °

Rješenje:

<u>I način – pomoću C_p</u>



$$C_{p,2} = -\frac{2(\alpha-\delta)}{\sqrt{M_1^2-1}} = \frac{2\cdot(7-5)/57.3}{\sqrt{1.6^2-1}} = -0.0559$$

$$C_{p,3} = -\frac{2(\alpha+\delta)}{\sqrt{M_1^2-1}} = \frac{2\cdot(7+5)/57.3}{\sqrt{1.6^2-1}} = -0.335$$

$$C_{p,4} = -C_{p,3} = 0.335$$

$$C_{p,5} = -C_{p,2} = 0.0559$$

$$l = \frac{c/2}{\cos\delta} = \frac{1}{\cos 5°} \approx 1.004 \text{ m}$$

$$L = -L_2 - L_3 + L_4 + L_5$$

$$L = -C_{p,2}\cos(\alpha-\delta)\, l q_\infty - C_{p,3} l \cos(\alpha+\delta)\, q_\infty + C_{p,4} l \cos(\alpha+\delta)\, q_\infty + C_{p,5} l \cos(\alpha-\delta)\, q_\infty$$

$$L = \left[\left(C_{p,5} - C_{p,2}\right)\cos(\alpha-\delta) + \left(C_{p,4} - C_{p,3}\right)\cos(\alpha+\delta)\right] q_\infty l =$$

$$L = \left[2C_{p,5}\cos(\alpha-\delta) + 2C_{p,4}\cos(\alpha+\delta)\right] q_\infty l$$
$$= [2 \cdot 0.0559 \cdot \cos 2° + 2 \cdot 0.335 \cdot \cos 12°] \cdot 1.00382 \cdot 125440 = 96591 \text{ N}$$

$$c_l = \frac{L}{q_1 S} = \frac{96.591}{125.44 \cdot 2} = 0.385$$

$$D = -D_2 - D_3 + D_4 + D_5$$

$$D = -C_{p,2}\sin(\alpha-\delta)\, l q_\infty - C_{p,3} l \sin(\alpha+\delta)\, q_\infty + C_{p,4} l \sin(\alpha+\delta)\, q_\infty + C_{p,5} l \sin(\alpha-\delta)\, q_\infty$$

$$D = \left[\left(C_{p,5} - C_{p,2}\right)\sin(\alpha-\delta) + \left(C_{p,4} - C_{p,3}\right)\sin(\alpha+\delta)\right] q_\infty l =$$

$$D = \left[2C_{p,5}\sin(\alpha-\delta) + 2C_{p,4}\sin(\alpha+\delta)\right] q_\infty l$$
$$= [2 \cdot 0.0559 \cdot \sin 2° + 2 \cdot 0.335 \cdot \sin 12°] \cdot 1.00382 \cdot 125440 = 18032 \text{ N}$$

$$c_d = \frac{D}{q_1 S} = \frac{18.032}{125.44 \cdot 2} = 0.0719$$

II način – pomoću c_l i c_d (Ackeret)

$$c_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}} = \frac{4 \cdot 7/57.3}{\sqrt{1.6^2 - 1}} = 0.391$$

$$c_d = \frac{4}{\sqrt{M_1^2 - 1}}\left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\tan^2\delta\right) = \frac{4}{\sqrt{1.6^2 - 1}}\left[\left(\frac{7}{57.3}\right)^2 + \frac{1}{2}\tan^2 5°\right] = 0.0601$$

Tablica 1. Usporedba rješenja

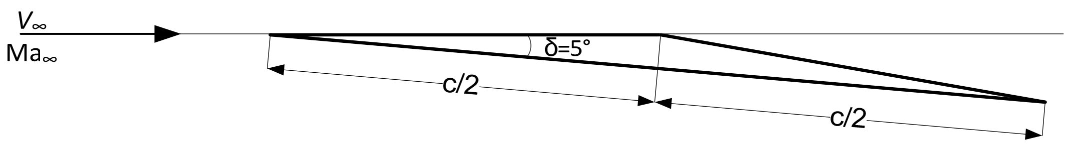
	c_l	c_d
Egzaktna metoda	0.42	0.0786
Linearna metoda - *Cp*	0.385	0.0719
Linearna metoda – c_l i c_d	0.391	0.0601

9.2 **Klinasti aeroprofil prema slici nalazi se u nadzvučnoj struji zraka. Egzaktnom i linearnom teorijom aeroprofila u nadzvučnoj struji zraka odredi:**

a) koeficijent uzgona

b) koeficijent valnog otpora

c) koeficijent momenta za napadni brid



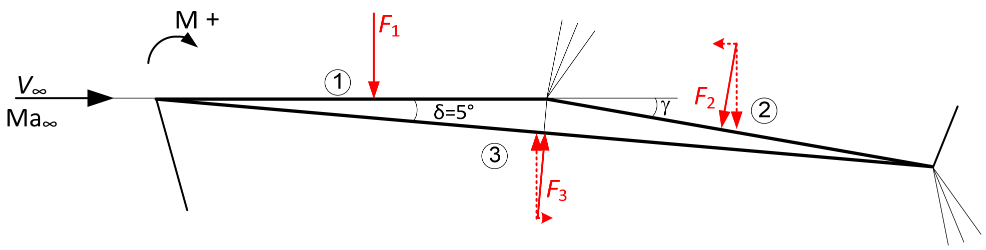
Podaci:

Ma_∞= 2,5 c = 1 m

$H = 10\ 000$ m p_∞= 26499 Pa

Rješenje:

Egzaktan proračun



δ= 5 °

γ=2δ=10 °

Izentropsko strujanje – zaustavni tlakovi su jednaki,

① $Ma_1 = Ma_\infty = 2.5;\ p_1 = p_\infty = 26499$ Pa

② $\theta = \nu(Ma_2) - \nu(Ma_1);\ \theta = \gamma = 10°$

$Ma_1 = Ma_\infty = 2.5 \rightarrow \nu(Ma_1) = 39.12$

$\nu(Ma_2) = \nu(Ma_1) + \theta = 39.12 + 10 = 49.12$

Iz App. C slijedi da je za $\nu_2 = 49.12 \rightarrow M_2 = 3$

S obzirom da je strujanje kroz ekspanzijske valove izentropsko (odnosno, p_0 i T_0 su konstantni kroz valove) slijedi iz jednadžbi za izentropsko strujanje:

$$\frac{p_{0,\infty}}{p_\infty} = 17.09$$

$$\frac{p_{0,2}}{p_2} = 36.73$$

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{\frac{p_{0,\infty}}{p_\infty}}{\frac{p_{0,2}}{p_2}} = \frac{17.09}{36.73} = 0.4653$$

$$p_2 = 0.4653 \cdot p_\infty = 0.4653 \cdot 26499 = 12330 \text{ Pa}$$

③ $Ma_\infty = 2.5;\ ;\ \theta = 5° \ \rightarrow \ \beta = 27.5°$ (iz dijagrama ϑ-β-M)

$$M_{n,\infty} = M_\infty \sin\beta = 2.5 \cdot \sin 27.5° = 1.154$$

Iz tablice u App. B za $M_{n,\infty} = 1.154$ moguće je odrediti

$$M_{n,3} = 0.872$$

$$M_3 = \frac{M_{n,3}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0.872}{\sin(27.5° - 5°)} = 2.279$$

$$\frac{p_3}{p_\infty} = 1.387$$

$$p_3 = 1.387 \cdot p_\infty = 1.387 \cdot 26499 = 36757 \text{ Pa}$$

$$l = \frac{c/2}{\cos\delta} = \frac{0.5}{\cos 5} \approx 0.502 \text{ m}$$

$$F_1 = p_1 \cdot \frac{c/2}{\cos\delta} \cdot 1 = 13300 \text{ N}$$

$$F_2 = p_2 \cdot \frac{c/2}{\cos\delta} \cdot 1 = 6189 \text{ N}$$

$$F_3 = p_3 \cdot c \cdot 1 = 36757 \text{ N}$$

$$L = -F_1 - F_2\cos\gamma + F_3\cos\delta = -13300 - 6189\cos 10° + 36757\cos 5° = 17222 \text{ N}$$

$$D = -F_2\sin\gamma + F_3\sin\delta = -6189\sin 10° + 36757\sin 5° = 2129 \text{ N}$$

$$q_\infty = \frac{\kappa}{2} p_\infty M_\infty^2 = 0.7 \cdot 26499 \cdot 2.5^2 = 115933 \text{ Pa}$$

$$c_l = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{17222}{115933 \cdot 1} = 0.149$$

$$c_d = \frac{D}{q_{1\infty} S} = \frac{2129}{115933 \cdot 1} = 0.0184$$

$$M \approx F_1 \cdot \frac{c}{4} + F_2 \cdot \frac{3c}{4} - F_3 \cdot \frac{c}{2} = 13300 \cdot \frac{1}{4} + 6189 \cdot \frac{3}{4} - 36757 \cdot \frac{1}{2} = -10412 \text{ Nm}$$

$$c_m = \frac{M}{q_\infty S c} = \frac{-10412}{115933 \cdot 1 \cdot 1} = -0.0898$$

Linearna teorija (Ackeretova teorija)

$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$C_p = \frac{\Delta p}{q_\infty} = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}$$

$$\Delta p = C_p q_\infty$$

$$F = \Delta p \cdot A$$

Tablica 2. Određivanje sile uslijed tlaka na površine aeroprofila

	θ [°]	C_p	Δp [Pa]	F [N]
1	0°	0	0	0
2	-10°	-0.152	-17622	-8845
3	5°	0.0762	8834	8834

$$L = -F_1 - F_2 \cos\gamma + F_3 \cos\delta = 8845 \cos 10° + 8834 \cos 5° = 17511 \text{ N}$$

$$D = -F_2 \sin\gamma + F_3 \sin\delta = 8845 \sin 10° + 8834 \sin 5° = 2306 \text{ N}$$

$$c_l = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{17511}{115933 \cdot 1} = 0.151$$

$$c_d = \frac{D}{q_{1\infty} S} = \frac{2306}{115933 \cdot 1} = 0.0199$$

$$M \approx F_2 \cdot \frac{3c}{4} - F_3 \cdot \frac{c}{2} = -8845 \cdot \frac{3}{4} - 8834 \cdot \frac{1}{2} = -11051 \text{ Nm}$$

$$c_m = \frac{M}{q_\infty S c} = \frac{-11051}{115933 \cdot 1 \cdot 1} = -0.0953$$

$$c_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{4 \cdot 5/57.3}{\sqrt{2.5^2 - 1}} = 0.152$$

$$c_d = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\tan^2\delta\right) = \frac{4}{\sqrt{2.5^2 - 1}}\left[\left(\frac{5}{57.3}\right)^2 + \frac{1}{2}\tan^2\left(\frac{5}{57.3}\right)\right] = 0.0200$$

PRILOZI

A. Tablica standardne atmosfere

H [m]	T [K]	p [Pa]	ρ [kg/m^3]	a [m/s]	ν [m^2/s]
0	288,15	101325	1,225	340,3	1,460E-05
500	284,9	95460,1	1,1673	338,4	1,519E-05
1000	281,65	89873,2	1,1116	336,4	1,582E-05
1500	278,4	84554,1	1,0580	334,5	1,647E-05
2000	275,15	79492,7	1,0065	332,5	1,716E-05
2500	271,9	74679,6	0,9568	330,6	1,789E-05
3000	268,65	70105,2	0,9091	328,6	1,866E-05
3500	265,4	65760,4	0,8632	326,6	1,947E-05
4000	262,15	61636,2	0,8191	324,6	2,033E-05
4500	258,9	57724,1	0,7767	322,6	2,123E-05
5000	255,65	54015,4	0,7361	320,5	2,219E-05
5500	252,4	50502,1	0,6971	318,5	2,321E-05
6000	249,15	47176,2	0,6596	316,4	2,428E-05
6500	245,9	44029,9	0,6238	314,4	2,542E-05
7000	242,65	41055,7	0,5894	312,3	2,663E-05
7500	239,4	38246,4	0,5566	310,2	2,792E-05
8000	236,15	35594,7	0,5251	308,1	2,929E-05
8500	232,9	33094	0,4950	305,9	3,074E-05
9000	229,65	30737,4	0,4663	303,8	3,229E-05
9500	226,4	28518,6	0,4388	301,6	3,394E-05
10000	223,15	26431,3	0,4126	299,5	3,570E-05
10500	219,9	24469,5	0,3877	297,3	3,758E-05
11000	216,65	22627,3	0,3639	295,1	3,958E-05
11500	216,65	20916	0,3363	295,1	4,282E-05
12000	216,65	19330,1	0,3108	295,1	4,634E-05
13000	216,65	16509,9	0,2655	295,1	5,425E-05
14000	216,65	14101,2	0,2267	295,1	6,352E-05
15000	216,65	12044,0	0,1937	295,1	7,437E-05
16000	216,65	10286,8	0,1654	295,1	8,707E-05
17000	216,65	8786,0	0,1413	295,1	1,019E-04
18000	216,65	7504	0,1207	295,1	1,194E-04
19000	216,65	6409,4	0,1031	295,1	1,397E-04
20000	216,65	5474,3	0,0880	295,1	1,636E-04

B. Popis formula

BIBLIOGRAFIJA

[1] Abbot, I. H., Von Doenhoff, A. E. *Theory of Wing Section.* New York: Dover, 1959.

[2] Anderson, J.D. *Introduction to Flight.* New York: McGraw Hill, 2000.

[3] Anderson, J.D. *Fundamentals of Aerodynamics.* New York: McGraw-Hill, 2001.

[4] Kesić, P. *Osnove aerodinamike.* Zagreb: FSB, 2003.

[5] Kuethe, A. M., Chow, C. *Foundations of Aerodynamics.* New York: John Wiley & Sons, 1986.

[6] McCormick, B. *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics.* New York: John Wiley & Sons, 1995.

[7] Rendulić, Z. *Aerodinamika.* Zemun: RO Sava Mihić, 1984.