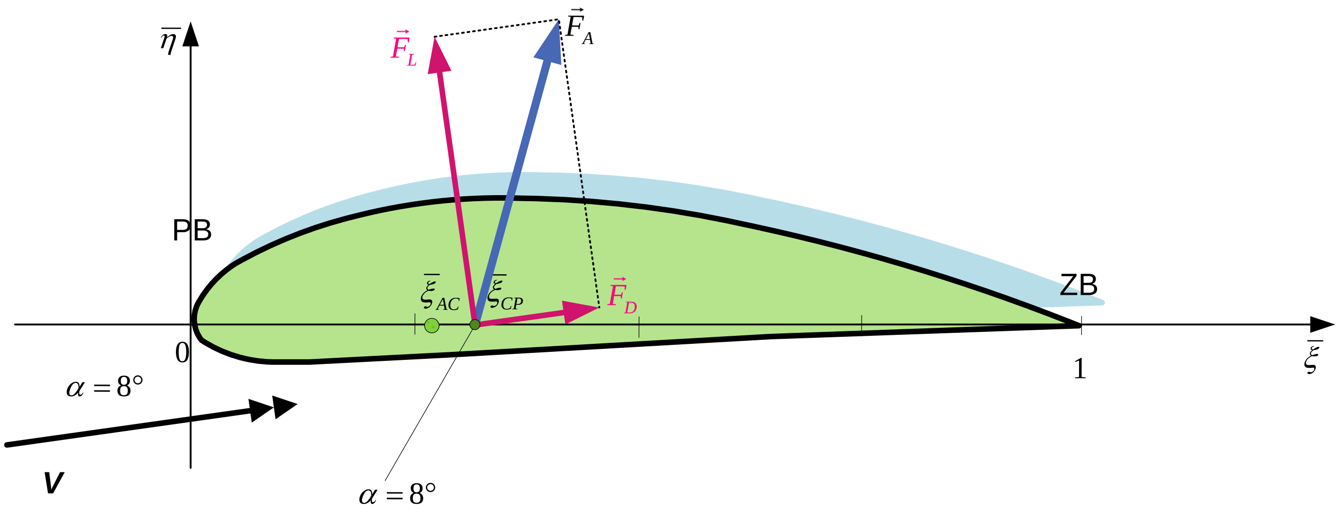
Fakultet prometnih znanosti

Zbirka riješenih zadataka iz Teorije leta I

Davor Franjković

Karolina Krajček Nikolić



Sveučilište u Zagrebu
Fakultet prometnih znanosti
Zavod za aeronautiku

Davor Franjković
Karolina Krajček Nikolić

Zbirka riješenih zadataka iz TEORIJE LETA I

Zagreb, 2015.

Izdavač
Fakultet prometnih znanosti
Sveučilišta u Zagrebu

Za izdavača
Prof. dr. sc. Hrvoje Gold

Recenzenti
Prof. dr. sc. Ernest Bazijanac
Fakultet prometnih znanosti, Zagreb

Izv. prof. dr. sc. Milan Vrdoljak
Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb

ISBN 978-953-243-077-6

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka namijenjena je studentima prve godine prediplomskog studija aeronautike na Fakultetu prometnih znanosti u Zagrebu. Zbirka u potpunosti pokriva nastavni plan i program kolegija Teorija leta I kojeg studenti aeronautike (vojni i civilni piloti te kontrolori leta) slušaju u drugom semestru.

Poglavlja u zbirci prate nastavni plan i program s obzirom na redoslijed i opseg gradiva u okviru nastavnog procesa. Zadaci su ilustrirani crtežima radi lakšeg razumijevanja problematike. Na kraju svakog poglavlja riješen je barem jedan zadatak pomoću Matlab-a.

S obzirom da studenti aeronautike nemaju kolegij koji samostalno obrađuje mehaniku fluida općenito, Zbirka u drugom poglavlju sadrži niz zadataka iz osnova mehanike fluida koje su nužne za razumijevanje temeljnih aerodinamičkih pojmova potrebnih studentu za uspješno praćenje i svladavanje gradiva.

Na kraju Zbirke dana su dva priloga, Tablica standardne atmosfere i Popis formula kojima se studenti mogu služiti na pismenom dijelu ispita.

Zagreb, ožujak 2015. Autori

SADRŽAJ

POPIS OZNAKA

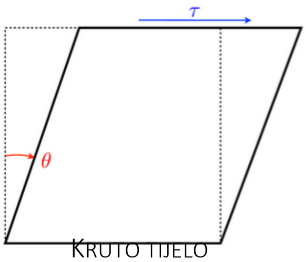
Oznaka	Opis	Jedinica
A	Površina krila	m^2
A_p	Površina ploče	m^2
AR	Aspektni odnos krila	-
$\bar{C}_{fl}$	Koeficijent sile trenja laminarnog graničnog sloja	-
C_M	Koeficijent momenta	-
C_S	Koeficijent izbora propelera	-
C_T	Koeficijent vučne sile propelera	-
C_p	Koeficijent tlaka	-
C_p	Koeficijent snage propelera	-
C_{xi}	Inducirani koeficijent otpora	-
C_z	Koeficijent uzgona krila	-
F_{in}	Inercijalna sila	N
F_v	Vučna sila propelera	N
F_μ	Viskozna sila	N
H_a	Aerodinamički korak propelera	m
I_t	Intenzitet turbulencije	-
P_k	Snaga propelera, korisna snaga	W
P_u	Snaga motora, uložena snaga	W
R_0	Radijus Zemlje	m
S_k	Klizanje propelera	m
V_∞	Brzina neporemećene struje zraka	m/s
V_e	Ekvivalentna brzina	m/s
X_0	Parazitni otpor	N
X_{uk}	Ukupna sila otpora zrakoplova	N
c_{MPB}	Koeficijent momenta oko prednjeg brida aeroprofila	-

c_p	Specifična toplina pri konstantnom tlaku	J/kg K
c_v	Specifična toplina pri konstantnom volumenu	J/kg K
c_x	Koeficijent otpora aeroprofila	-
c_z	Koeficijent uzgona aeroprofila	-
c_{zmax}	Maksimalni koeficijent uzgona aeroprofila	-
$\dot{m}$	Maseni protok	kg/s
m_0	Nagib krivulje uzgona aeroprofila	1/rad
p_∞	Tlak neporemećene struje zraka	Pa
q_∞	Dinamički tlak neporemećene struje zraka	Pa
w_{y0}	Inducirana komponenta brzine na položaju y_0	m/s
x_{AC}	Položaj aerodinamičkog centra	m
x_{CP}	Položaj centra potiska	m
α_0	Efektivni napadni kut	rad
α_a	Apsolutni napadni kut	rad
α_i	Inducirani napadni kut	rad
α_{z0}	Kut nultog uzgona	rad
ε_t	Intenzitet turbulencije	-
ρ_∞	Gustoća neporemećene struje zraka	kg/m^3
ρ_n	Gustoća zraka u ISA/SL	kg/m^3
ρ_{vz}	Gustoća vlažnog zraka	kg/m^3
ΔV_u	Porast brzine kroz propeler	m/s
Γ	Intenzitet cirkulacije	m/s^2
D	Promjer	m
E	Modul elastičnosti fluida	N/m^2
Eu	Eulerov broj	-
Fr	Froudeov broj	-
J	Koeficijent napredovanja propelera	-
M	Moment propinjanja	Nm
M	Dimenzionalni simbol za masu	-
Ma	Machov broj	-
Re	Reynoldsov broj	-
St	Strouhaleov broj	-
T	Temperatura zraka u K	K
T	Dimenzionalni simbol za vrijeme	-

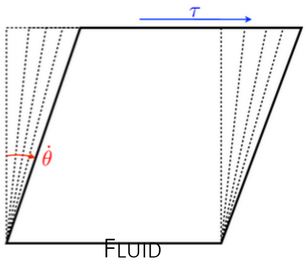
V	Brzina zraka (zrakoplova)	m/s
Z	Sila uzgona	N
e	Oswaldov koeficijent	-
m	Nagib krivulje uzgona krila	1/rad
n	Broj okretaja propelera u jedinici vremena	okr/s
p	Tlak zraka	Pa
p_z	Zaustavni tlak zraka	Pa
p_d	Dinamički tlak zraka	Pa
t	Temperatura zraka u °C	°C
u	Unutrašnja energija	J
α	Napadni kut	rad
β	Konstruktivni kut propelera	rad
β	Gradijent promjene temperature s visinom u ISA	1/K
δ	Debljina graničnog sloja	m
η	Iskoristivost propelera	-
μ	Dinamički koeficijent viskoznosti	Pas
ν	Kinematički koeficijent viskoznosti	m^2/s
τ	Koeficijent korekcije kuta konačnog krila	-
φ	Relativna vlažnost zraka	-
ϕ	Aerodinamički kut propelera	rad

1 OSNOVNE VELIČINE STANJA FLUIDA

Među fluide ubrajaju se sve tekućine i svi plinovi. Tehnička definicija fluida glasi: “*Kada na površinu fluida djeluje tangencijalno naprezanje* τ*, fluid će se neprekidno (kontinuirano) deformirati, a primijenjeno tangencijalno naprezanje će obično biti proporcionalno brzini deformacije* $\dot{\theta}$.”



KRUTO TIJELO



FLUID

U okviru kolegija Teorija leta I, fluid će se promatrati u uvjetima u kojima se može smatrati kontinuiranim. Stanje fluida pri strujanju ili u mirovanju izražava se osobinama tj. veličinama stanja. Osnovne veličine stanja fluida su: tlak, temperatura, gustoća, viskoznost, stlačivost, specifična toplina, unutrašnja energija, entalpija, entropija, toplinska vodljivost, ...

Tlak $\boldsymbol{p}$ [Pa] je jednak sili po jedinici površine (N/m^2). **Temperatura** $\boldsymbol{T}$ [K] predstavlja mjeru prosječne kinetičke energije promatranog dijela fluida. Kada nema molekularnog gibanja temperatura promatranog fluida jednaka je apsolutnoj nuli, 0 K. **Gustoća** $\boldsymbol{\rho}$ [kg/m^3] je omjer mase i volumena promatranog fluida. Veza između **tlaka**, **temperature** i **gustoće** za savršeni plin (onaj čije su međumolekularne sile zanemarive) dana je **jednadžbom stanja plina**: $p = \rho RT$.

Viskoznost je otpor kojim se fluid suprotstavlja strujanju. Mjera viskoznosti je vrijeme potrebno da se fluid pretoči iz jedne posude u drugu. Dulje vrijeme, veća viskoznost. Viskoznost promatramo posredno preko *Re* broja. **Stlačivost** predstavlja relativnu promjenu gustoće fluida ($d\rho/\rho$) uzrokovanu promjenom tlaka za dp.

Specifična toplina $\boldsymbol{c_p}$ ili $\boldsymbol{c_v}$ je količina topline potrebna da jedinici mase poraste temperatura za 1 K. **Unutrašnja energija** $\boldsymbol{u}$ je energija koju sadrže molekule zraka uslijed svog gibanja. **Entalpija** $\boldsymbol{h}$ je zbroj unutrašnje energije u, umnoška tlaka p i specifičnog volumena v: $h = u + pv$ te dh = c_pdT. **Entropija** $\boldsymbol{s}$ je veličina stanja koja predstavlja mjeru neuređenosti nekog sustava. Najveća uređenost sustava je pri apsolutnoj nuli, 0 K. Prema

2. zakonu termodinamike, entropija nikada ne može biti negativna ($s \geq 0$) te njena promjena između dva stanja ne ovisi o procesu između ta dva stanja.

1.1

Manometar mjeri relativni tlak Δ*p* = 2,55 bar. Odredi apsolutni tlak ako se manometar nalazi u uvjetima:

a) standardne atmosfere na razini mora (ISA/SL),

b) atmosferskog tlaka od 98 700 Pa.

Rješenje:

$1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa} \quad \rightarrow \quad \Delta p = 2{,}55\ \text{bar} = 2{,}55 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

a) uvjeti standardne atmosfere na razini mora (ISA/SL):

$p_a = p_{0n}$

$p_{0n} = 101\ 325\ \text{Pa}\,; \quad T_{0n} = 288{,}15\ K; \quad \rho_{0n} = 1{,}225\ \text{kg/m}^3$

$p = p_a + \Delta p = 101\ 325 + 2{,}55 \cdot 10^5 = 356\ 325\ \text{Pa} = 3{,}56 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

$p = 3{,}56 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

b) $p_a = 98\ 700\ \text{Pa}$

$p = p_a + \Delta p = 98700 + 2{,}55 \cdot 10^5 = 353700\ \text{Pa} = 3{,}537 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

$p = 3{,}537 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

1.2

Transmiter apsolutnog tlaka pokazuje apsolutnu veličinu tlaka p_{APS} = 0,65 bar. Izrazi taj tlak relativno u odnosu na tlak okolnog zraka p_a = 0,98 bar i u postocima vakuuma.

Rješenje:

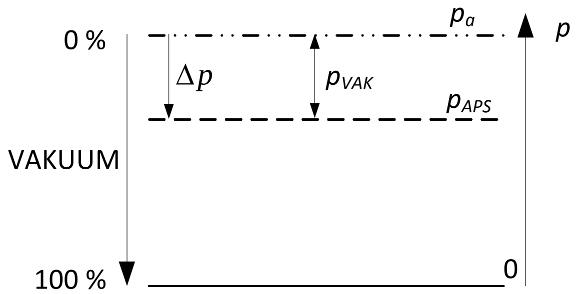
$p_{APS} = 0{,}65\ \text{bar} = 0{,}65 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

$p_a = 0{,}98\ \text{bar} = 0{,}98 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

$\Delta p = p_{APS} - p_a = 0{,}65 \cdot 10^5 - 0{,}98 \cdot 10^5 = -33\ 000\ \text{Pa} = -0{,}33 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

$p_{VAK} = 0{,}33 \cdot 10^5\ \text{Pa}$

$p_{VAK}\ [\%] = \dfrac{0{,}33}{0{,}98} \cdot 100 = 33{,}7\%$



1.3 **U spremniku volumena V = 2 m³ pri tlaku Δp = 3,5 bar (u odnosu na tlak okoline) i temperaturi t = 25 °C nalazi se zrak. Odredi masu zraka u spremniku.**

Rješenje:

$V = 2\ \mathrm{m}^3$

$\Delta p = 3{,}5\ \mathrm{bar} = 3{,}5{\cdot}10^5\ \mathrm{Pa} \rightarrow p = \Delta p\ +\ p_n = 3{,}5{\cdot}10^5\ +\ 101\ 325 = 451\ 325\ \mathrm{Pa}$

$t = 25\ °\mathrm{C}$

$T\ [\mathrm{K}] = t\ [°\mathrm{C}] + 273{,}15 \quad \rightarrow \quad T = t + 273{,}15 = 25 + 273{,}15 = 298{,}15\ \mathrm{K}$

$R = 287{,}053\ \ \mathrm{J/kgK}$

$$p = \rho{\cdot}\, R \cdot T \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{451\ 325}{287{,}053 \cdot 298{,}15} = 5{,}273\ \mathrm{kg/m^3}$$

$m = \rho \cdot V = 5{,}273 \cdot 2 = 10{,}55\ \mathrm{kg}$

1.4 **Za zrak pri temperaturi t = 20 °C i standardnom atmosferskom tlaku na razini mora, potrebno je izračunati:**

a) dinamički koeficijent viskoznosti prema eksponencijalnom zakonu,

b) dinamički koeficijent viskoznosti prema Sutherlandovom zakonu,

c) kinematički koeficijent viskoznosti[1].

Rješenje:

$t = 20\ °\mathrm{C} \quad \rightarrow \quad T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\ \mathrm{K}$

$p_n = 101\ 325\ \ \mathrm{Pa}$

$$\rho = \frac{p_n}{R \cdot T} = \frac{101\ 325}{287{,}053 \cdot 293{,}15} = 1{,}204\ \mathrm{kg/m^3}$$

a) $\mu = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0{,}76} \quad \rightarrow \quad \mu = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot 293{,}15^{0{,}76} = 1{,}812 \cdot 10^{-5}\ \ \mathrm{Pas}$

b) $\mu = 1{,}458 \cdot 10^{-6} \cdot \dfrac{T^{1{,}5}}{T + 110{,}4} \quad \rightarrow \quad \mu = 1{,}458 \cdot 10^{-6} \cdot \dfrac{293{,}15^{1{,}5}}{293{,}15 + 110{,}4} = 1{,}813{\cdot}\ 10^{-5}\ \ \mathrm{Pas}$

c) $\nu = \dfrac{\mu}{\rho} = \dfrac{1{,}812 \cdot 10^{-5}}{1{,}204} = 1{,}505 \cdot 10^{-5}\ \ \mathrm{m^2/s}$

[1] ***Kinematički koeficijent viskoznosti –*** *omjer viskoznih i inercijalnih sila*

Izračunaj relativnu gustoću zraka na visini *h* = 2000 m, ako je tlak zraka jednak standardnom atmosferskom tlaku, a temperatura zraka je 10˚C. 1.5

Rješenje:

$t = 10\ °\mathrm{C} \quad \rightarrow \quad T = t + 273{,}15 = 10 + 273{,}15 = 283{,}15\ \mathrm{K}$

Iz tablice za standardnu atmosferu (*International Standard Atmosphere*, ISA) za nadmorsku visinu $h = 2000$ m očita se standardni tlak zraka na toj visini $\rightarrow\ p_a = 79\ 501{,}4\ \ \mathrm{Pa}$

$$\rho = \frac{p_a}{R \cdot T} = \frac{79\ 501{,}4}{287{,}053 \cdot 283{,}15} = 0{,}978\ \ \mathrm{kg/m^3}$$

Relativna gustoća je omjer gustoće promatranog zraka i gustoće zraka pri referentnim uvjetima (15 ˚C i 101325 Pa)

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{0{,}978}{1{,}225} = 0{,}798 \qquad (79{,}8\ \%)$$

Izračunaj specifične topline, unutarnju energiju i entalpiju za zrak na razini mora pri standardnim atmosferskim uvjetima. 1.6

Rješenje:

$p = 101\ 325\ \mathrm{Pa}$

$T = 288{,}15\ \mathrm{K}$

$\rho = 1{,}225\ \mathrm{kg/m^3}$

$R = 287{,}053\ \mathrm{J/kgK}$

$\kappa = 1{,}4$

$* \ c_p = \dfrac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1} = \dfrac{1{,}4 \cdot 287{,}053}{1{,}4 - 1} = 1004{,}7\ \ \mathrm{J/kg\ K}$ … specifična toplina pri konstantnom tlaku

$* \ c_v = \dfrac{R}{\kappa - 1} = \dfrac{287{,}053}{1{,}4 - 1} = 717{,}6\ \ \mathrm{J/kg\ K}$ … specifična toplina pri konstantnom volumenu

* provjera: $c_p = c_v \cdot \kappa = 717{,}6 \cdot 1{,}4 = 1004{,}7\ \ \mathrm{J/kg\ K}$

$$c_p = c_v + R = 717{,}6 + 287{,}053 = 1004{,}7\ \ \mathrm{J/kg\ K}$$

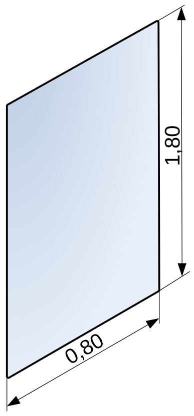
$* \ u = c_v \cdot T = 717{,}6 \cdot 288{,}15 = 206\ 776\ \mathrm{J/kg}$ ... specifična unutarnja energija

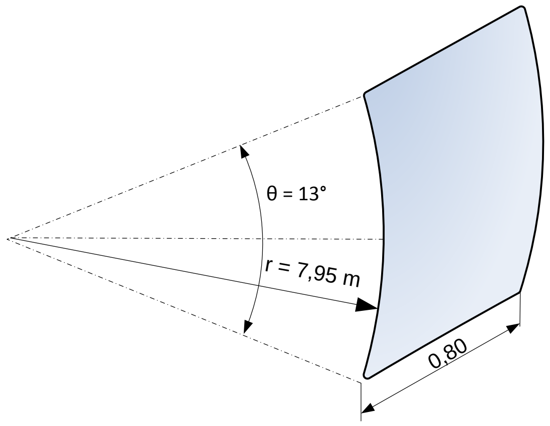
$* \ h = c_p \cdot T = 1004{,}7 \cdot 288{,}15 = 289\ 504\ \mathrm{J/kg}$ ... specifična entalpija

1.7 **Izračunaj rezultantnu silu koja djeluje na vrata aviona koji leti na visini 9000 m u uvjetima standardne atmosfere. U unutrašnjosti aviona se, radi udobnosti putnika, održava standardan tlak na razini mora. Oblik i dimenzije vrata su:**

a) pravokutna: b x h = 0,80 x 1,80

b) cilindrična prema slici.

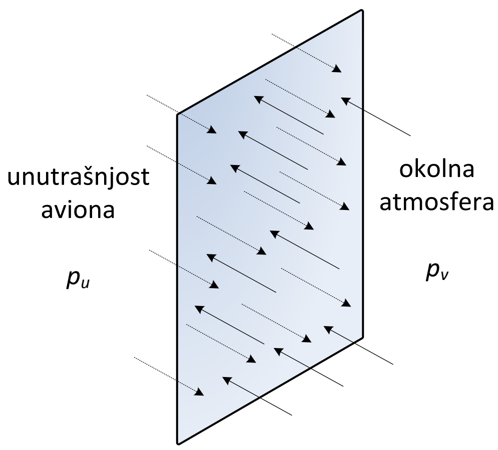




Rješenje:

* standardni tlak na 9 000 m: $p_a = 30\,801$ Pa

* standardni tlak na razini mora: $p_n = 101\,325$ Pa



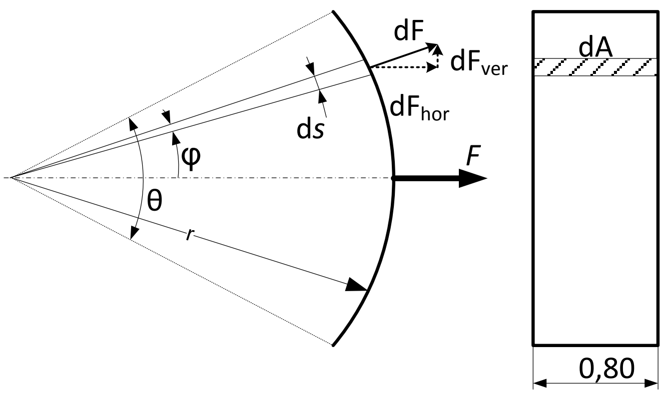
a) Na vrata djeluje sila uslijed razlike tlaka Δp:

$$\Delta p = p_u - p_v = 101325 - 30801 = 70\,524 \text{ Pa}$$

$$F = \Delta p \cdot A = 70524 \cdot 0{,}80 \cdot 1{,}80 = 101\,555 \text{ N}$$

$$F = 101\,555 \text{ N}$$

b) Diferencijalno mala sila dF na diferencijalno malom dijelu vrata dA:



$$dF = \Delta p \cdot dA = \Delta p \cdot 0{,}80 \cdot ds$$

$$dF = 0{,}80 \cdot \Delta p \cdot r \cdot d\varphi$$

$$dA = 0{,}80 \cdot ds$$

$$ds = r \cdot d\varphi$$

Komponente diferencijalno male sile dF u horizontalnom i vertikalnom smjeru:

$$dF_{hor} = dF \cdot \cos\varphi = 0{,}80 \cdot \Delta p \cdot r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

$$dF_{ver} = dF \cdot \sin\varphi = 0{,}80 \cdot \Delta p \cdot r \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi$$

Integriranjem[2] se dobivaju ukupne komponente sile F_{hor} i F_{ver}:

$$F_{hor} = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} dF_{hor} = 0{,}80 \cdot \Delta p \cdot r \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \cos\varphi \; d\varphi = 0{,}80 \cdot \Delta p \cdot r \cdot \sin\varphi \, \Big|_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}$$

$$= 0{,}80 \cdot 70524 \cdot 7{,}95 \cdot (\sin 6{,}5 - \sin(-6{,}5)) = 101\,551 \ \mathrm{N}$$

$$F_{ver} = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} dF_{ver} = 0{,}80 \cdot \Delta p \cdot r \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} sin\,\varphi \; d\varphi = -0{,}80 \cdot \Delta p \cdot r \cdot cos\,\varphi \, \Big|_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}$$

$$= 0{,}80 \cdot 70524 \cdot 7{,}95 \cdot (cos\,6{,}5 - cos(-6{,}5)) = 0 \ \mathrm{N}$$

$$F = F_{hor} = 101\,551 \ \mathrm{N}$$

* vertikalna komponenta sile pod b) jednaka je 0 zbog simetričnosti vrata pa je rezultantna sila jednaka horizontalnoj komponenti

* rezultati pod a) i b) su jednaki jer je površina vertikalne projekcije vrata u drugom slučaju jednaka površini vrata pod a):

$$h = 2 \cdot r \cdot \sin(\theta/2) = 2 \cdot 7{,}95 \cdot \sin(13/2) = 1{,}8 \ \mathrm{m}$$

* na vrata djeluje sila tlaka koja je jednaka sili težine koju ima masa od preko 10 tona, o čemu treba voditi računa pri dimenzioniranju vrata i šarki

[2] $\int \cos\varphi = \sin\varphi$
$\int \sin\varphi = -\cos\varphi$

2 OSNOVE MEHANIKE FLUIDA

Mehanika fluida bavi se određivanjem stanja fluida, brzine, te sila kojima djeluje fluid. Fluidi obuhvaćaju sve tekućine i plinove. Specifičnost fluida je što se deformiraju pod djelovanjem i najmanje smične sile. Mehanika fluida dijeli se na tri područja primjene: hidrodinamiku, dinamiku plinova i aerodinamiku. Aerodinamika je dakle, uža djelatnost mehanike fluida čiji je glavni zadatak odrediti sile i momente kojima zrak djeluje na objekte (otpor, uzgon, moment propinjanja, …), te karakteristike strujanja unutar otvorenih kanala (strujanja u mlaznom motoru, zračnom tunelu, ili mlaznicama općenito).

MEHANIKA **FLUIDA**		
HIDRODINAMIKA	DINAMIKA PLINOVA	AERODINAMIKA

Temeljni zakoni koji omogućuju određivanje navedenih karakteristika fluida su tri zakona očuvanja (konzervacije):

1. jednadžba očuvanja količine gibanja (*Momentum equation*),
2. jednadžba očuvanja mase ili jednadžba kontinuiteta (*Continuity equation*) te
3. energetska jednadžba poznatija kao prvi zakon termodinamike (*Energy equation*).

Za zrak vrijedi i

4. jednadžba stanja savršenog plina.

Ta tri zakona u svom integralnom obliku uz jednadžbu stanja zraka omogućuje određivanje veličina stanja zraka (T, p, ρ i V) u svim uvjetima strujanja.

Olakšavajuća činjenica je da se većina problema može riješiti uvođenjem pojedinih pretpostavki koje olakšavaju integraciju tih jednadžbi. Zbog toga se problemi rješavaju s obzirom na brzinu opstrujavanja (podzvučno, dozvučno, krozzvučno, nadzvučno) i područje (pod područje se misli na granični sloj, izvan granični sloj, vrtložni trag, strujanje u mlaznicama, strujanje u motoru i slično).

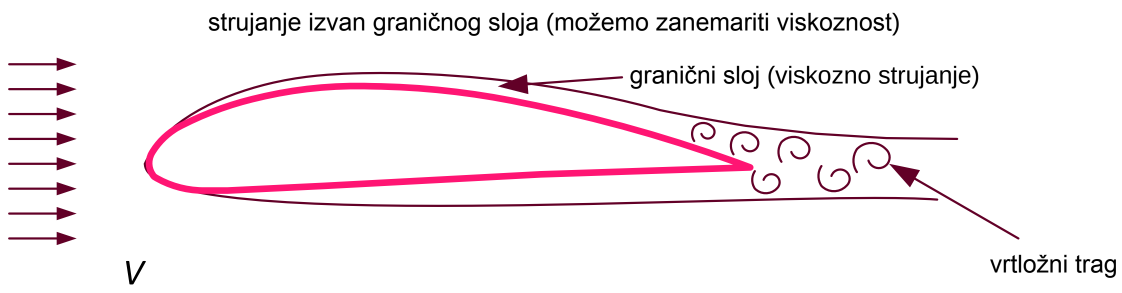
1. ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA (MOMENTUM EQUATION)

Zakon očuvanja količine gibanja kaže da je brzina promjene količine gibanja kontrolnog volumena jednaka je zbroju vanjskih (masenih, površinskih i ostalih) sila koje djeluju na taj materijalni volumen.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall} \rho\vec{V}\, d\forall + \int_{S} \left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}\right)\cdot\vec{V} = \int_{\forall} \rho\vec{f}\, d\forall - \int_{S} p d\vec{S} + \vec{F}_{visc} + \vec{F}_{kont} + \vec{F}_{osl}$$

Iz ovog zakona izvedena je Eulerova jednadžba koja se primjenjuje za opisivanje strujanja izvan graničnog sloja i u stlačivom i nestlačivom slučaju opstrujavanja.

Ako se jednadžba integrira uz pretpostavku nestlačivog strujanja (pretpostavlja se da se gustoća ne mijenja s promjenom tlaka) dobit će se poznata Bernoullijeva jednadžba.



Ako se promatra stlačivo strujanje tada je potrebno primijeniti integralni oblik Eulerove jednadžbe jer se i gustoća s promjenom tlaka mijenja. Ako se stlačivo strujanje odvija bez izmjene topline s okolinom i bez trenja u sustavu, promjena gustoće s tlakom opisuje se izentropskim zakonom, pa je moguće integrirati Eulerovu jednadžbu pri čemu se dobiva Saint-Venantova jednadžba. Saint-Venantova jednadžba opisuje dakle, stlačivo izentropsko strujanje (napomena: moguće ju je izvesti i pomoću ZAKONA O OČUVANJU ENERGIJE).

2. ZAKON OČUVANJA MASE ILI JEDNADŽBA KONTINUITETA

Zakon očuvanja mase kaže da masa ne može biti stvorena niti uništena. Kada se promatra kontrolni volumen, masa može ući i izaći kroz granice kontrolnog volumena. Međutim, kako se masa ne može stvoriti niti uništiti, to znači da se masa unutar kontrolnog volumena mora moći mijenjati kako bi uračunali protok mase kroz granice kontrolnog volumena. Drugim riječima, brzina promjene mase za promatrani kontrolni volumen mora biti konstatna, $\dot{m} = konst$.

3. ZAKON OČUVANJA ENERGIJE

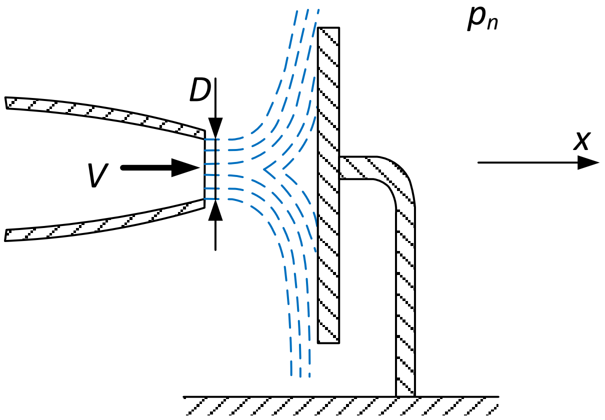
Zakon očuvanja energije, uključuje koncept unutrašnje energije sustava u. U ovom slučaju sustav je fluid koji se nalazi unutar kontrolnog volumena KV, a unutrašnja energija predstavlja sumu svih energija, svih molekula unutar KV. Ukupna energije u termodinamici dijeli se na kinetičku (ona vezana uz gibanje molekula: brzina, rotacije i vibracije) i potencijalnu (statička energija mirovanja, energija kemijskih veza). Zakon očuvanja energije ili 1. zakon termodinamike primijenjen na KV kaže da je promjena unutrašnje energije δu KV posljedica izvršenog rada δw i/ ili dodane topline δq:

$$\delta q+\delta w = \delta u$$

2.1 **Na ispitnom stolu istražuje se horizontalna sila koju stvara ispuh mlaznog motora na vertikalno postavljenu ravnu ploču. Brzina ispuha je 150 m/s pri standardnim uvjetima na razini mora, a promjer ispuha je 0,3 m. Odredi veličinu horizontalne sile u osloncu. Ispuh ima karakteristike zraka.**

Pretpostavke:

- **stacionarno strujanje**
- **nestlačivo**
- **ravnomjeran raspored brzina po presjeku gdje fluid sječe granicu kontrolnog volumena**
- **promatramo sile u x-smjeru.**



Rješenje:

<u>I način:</u>

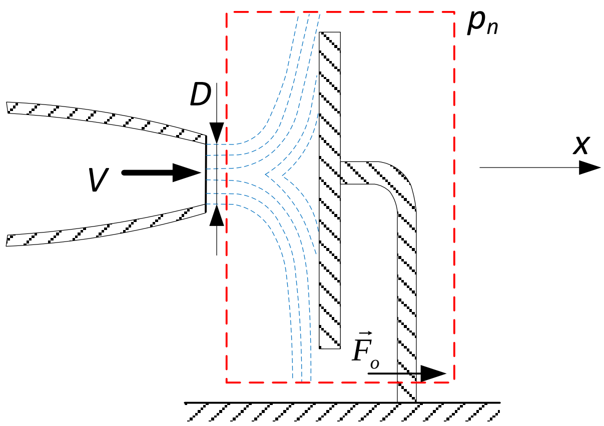
Odabran je kontrolni volumen tako da je površina na lijevoj strani jednaka površini na desnoj. Kontrolni volumen sječe oslonac. Ako se sila kojom oslonac djeluje na kontrolni volumen $\vec{F}_0$ pretpostavi pozitivnom, sila kontrolnog volumena na oslonac bit će jednaka po iznosu, ali suprotno usmjerena. Kako je strujanje stacionarno, prvi član u jednadžbi očuvanja količine gibanja je jednak nuli. Kontrolni volumen se ne naslanja na vanjske objekte pa je sila na konturu ($\vec{F}_K$) također jednaka nuli.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{KV} \rho\vec{V}\,d\forall}_{\emptyset} + \int_{KP} (\rho\vec{V}d\vec{S})\cdot\vec{V} = \underbrace{\vec{F}_G}_{\emptyset} + \vec{F}_p + \underbrace{\vec{F}_K}_{\emptyset} + \vec{F}_o$$

$$-\rho VVS_1 = p_n S - p_n S + \vec{F}_o$$

$$\vec{F}_o = -\rho VVS_1 = -1{,}225\cdot 150^2\cdot\frac{0{,}3^2\pi}{4} = -1948\ \mathrm{N}$$

$$\vec{F}_x = -\vec{F}_o = 1948\ \mathrm{N}$$



<u>II način:</u>

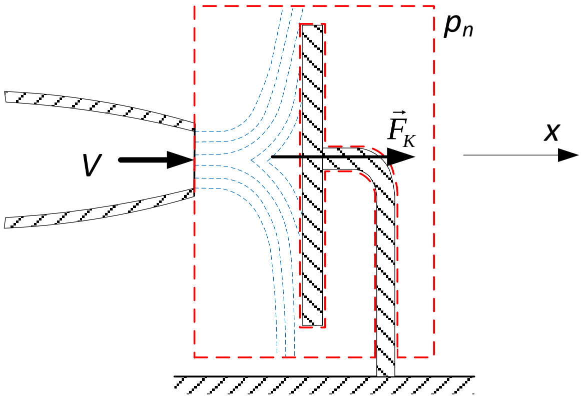
Odabran je kontrolni volumen tako da je površina na lijevoj strani jednaka površini na desnoj. Kontrolni volumen ne siječe oslonac. Međutim, kontrolni volumen je u dodiru sa osloncem preko nekoliko dijelova kontrolne površine. Oslonac/kontura na kontrolni volumen djeluje silom $\vec{F}_K$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{KV}\cancelto{\emptyset}{\rho\vec{V}}\,d\forall+\int_{KP}\left(\rho\vec{V}d\vec{S}\right)\cdot\vec{V}=\cancelto{\emptyset}{\vec{F}_G}+\vec{F}_p+\vec{F}_K+\cancelto{\emptyset}{\vec{F}_o}$$

$$-\rho VVS_1=p_nS-p_nS+\vec{F}_K$$

$$\vec{F}_K=-\rho V^2S_1=-1{,}225\cdot150^2\cdot\frac{0{,}3^2\pi}{4}=-1948\ \mathrm{N}$$

$$\vec{F}_x=-\vec{F}_K=1948\ \mathrm{N}$$



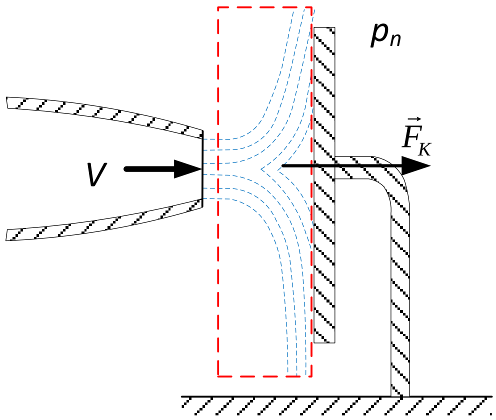
<u>III način:</u>

Odabran je kontrolni volumen tako da je površina na lijevoj strani jednaka površini na desnoj. Sila oslonca/konture na kontrolni volumen označena je s $\vec{F}_K$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{KV}\cancelto{\emptyset}{\rho\vec{V}}\,d\forall+\int_{KP}\left(\rho\vec{V}d\vec{S}\right)\cdot\vec{V}=\cancelto{\emptyset}{\vec{F}_G}+\vec{F}_p+\vec{F}_K+\cancelto{\emptyset}{\vec{F}_o}$$

$$-\rho VVS_1=p_nS+\vec{F}_K$$

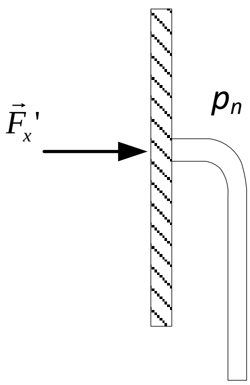
$$\vec{F}_K=-p_nS-\rho V^2S_1=-1{,}225\cdot150^2\cdot\frac{0{,}3^2\pi}{4}=-1948\ \mathrm{N}$$



$$\vec{F}_x'=-\vec{F}_K=p_nS+\rho V^2S_1$$

$$\vec{F}_x=\vec{F}_x'-p_nS=p_nS+\rho V^2S_1-p_nS$$

$$\vec{F}_x=\rho V^2S_1=1948\ \mathrm{N}$$



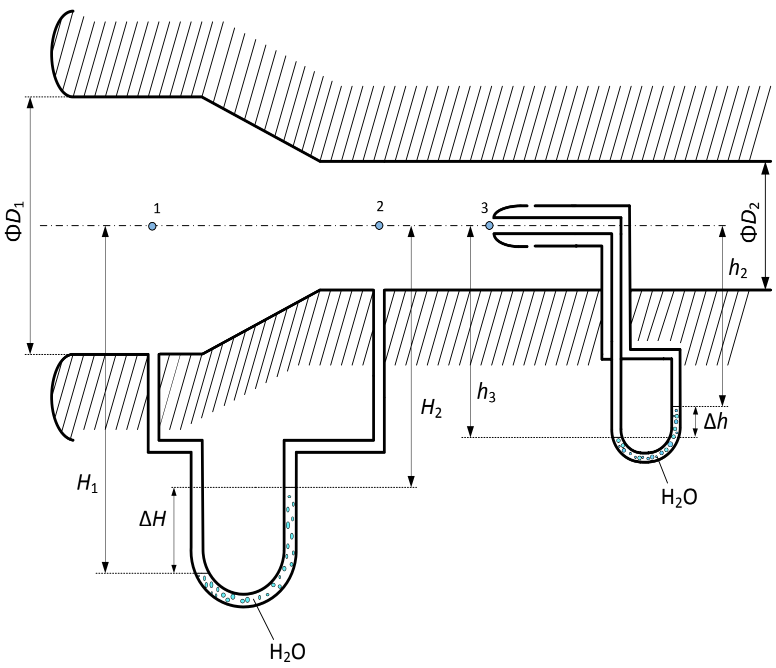
2.2 **Na ulaznom suženju protočnog presjeka mlaznog motora izmjeren je pad tlaka od 500 mm H_2O. Ako je promjer ulazne cijevi smanjen sa D_1 = 250 mm na D_2 = 200 mm, a zrakoplov leti na visini H = 2000 m, odredi:**

a) protok zraka kroz motor

b) brzinu zrakoplova

c) dinamički tlak izmjeren pomoću Pitot-Prandtl cjevčice postavljene u suženom dijelu.

Strujanje smatrati izotermnim i nestlačivim.



Rješenje:

$H = 2000$ m

$\rho = 1{,}0065\ \text{kg/m}^3$

$\dot{m} = \text{konst.}$ ... jednadžba kontinuiteta

$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$ uz $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ slijedi $V_1 A_1 = V_2 A_2$ odnosno:

$$V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{D_2^2}{D_1^2} \tag{1}$$

Jednadžba manometra od točke 1 do točke 2:

$$p_1 + \rho_a g H_1 = p_2 + \rho_a g H_2 + \rho_v g \Delta H$$

$$p_1 - p_2 = \rho_v g \Delta H - \rho_a g (H_1 - H_2) = \rho_a g \Delta H \left(\frac{\rho_v}{\rho_a} - 1\right) \tag{2}$$

Bernoullijeva jednadžba između točaka 1 i 2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_a V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_a V_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho_a (V_2^2 - V_1^2) \qquad (3)$$

(2) u (3) $\Rightarrow$ $$\frac{1}{2}\rho_a (V_2^2 - V_1^2) = \rho_a g \Delta H \left(\frac{\rho_v}{\rho_a} - 1\right)$$

$$V_2^2 \left(1 - \frac{V_1^2}{V_2^2}\right) = 2g\Delta H \left(\frac{\rho_v}{\rho_a} - 1\right) \qquad (4)$$

(1) u (4) $\Rightarrow$ $$V_2^2 \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right] = 2g\Delta H \left(\frac{\rho_v}{\rho_a} - 1\right)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g\Delta H \left(\frac{\rho_v}{\rho_a} - 1\right)}{1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot \left(\frac{1000}{1{,}0065} - 1\right)}{1 - \left(\frac{0{,}2}{0{,}25}\right)^4}} = 128{,}5 \text{ m/s}$$

a) $Q = V_2 A_2 = V_2 \dfrac{D_2^2 \pi}{4} = 128{,}5 \cdot \dfrac{0{,}2^2 \pi}{4} = 4{,}04 \ \text{m}^3/\text{s}$

b) $V_1 = V_2 \dfrac{D_2^2}{D_1^2} = 128{,}5 \cdot \dfrac{0{,}2^2}{0{,}25^2} = 82{,}2 \text{ m/s}$

$p_2 + \dfrac{1}{2}\rho_a V_2^2 = p_3 \ \rightarrow \ p_3 - p_2 = \dfrac{1}{2}\rho_a V_2^2$ ...Bernoullijeva jednadžba

$p_3 + \rho_a g h_3 = p_2 + \rho_a g h_2 + \rho_v g \Delta h$ ...jednadžba manometra od točke 2 do točke 3

$$p_3 - p_2 = \rho_v g \Delta h - \rho_a g (h_3 - h_2) = \rho_a g \Delta h \left(\frac{\rho_v}{\rho_a} - 1\right)$$

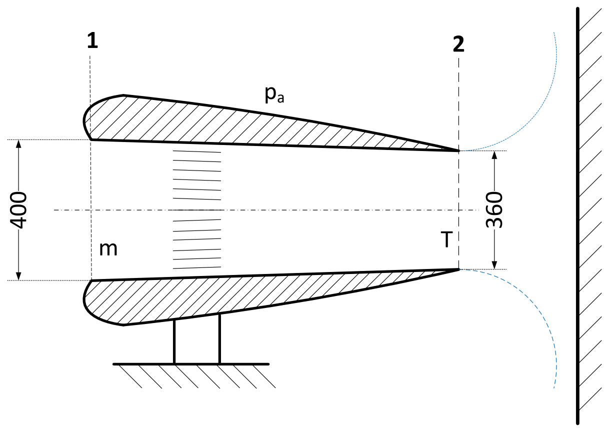
$$\frac{1}{2}\rho_a V_2^2 = \rho_a g \Delta h \left(\frac{\rho_v}{\rho_a} - 1\right)$$

$$\Delta h = \frac{V_2^2}{2g\left(\frac{\rho_v}{\rho_a} - 1\right)} = \frac{128{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81 \left(\frac{1000}{1{,}00646} - 1\right)} = 0{,}847 \text{ m}$$

$$p_\mathrm{d} = \rho_v g \Delta h = 1000 \cdot 9.81 \cdot 0.847 = 8309 \text{ Pa}$$

2.3 **Mlazni motor ispituje se na eksperimentalnom stolu u uvjetima standardne atmosfere na razini mora (ISA/SL). Ulazni promjer motora je 400 mm, a izlazni 360 mm. Maseni protok zraka na ulazu iznosi 15,4 kg/s, a temperatura plinova izgaranja na izlazu iz motora (pretpostaviti da imaju svojstva zraka) je 560 ˚C. Odrediti:**

a) **brzinu leta koju simuliraju gornji uvjeti (brzina zraka na ulazu u motor)**
b) **brzinu plinova izgaranja na izlazu iz motora**
c) **silu kojom plinovi djeluju na ploču postavljenu okomito na pravac strujanja, neposredno iza motora.**



Rješenje:

$p_1 = p_2 = p_a = 101325 \text{ Pa} \qquad T_2 = 560\ °\text{C} = 833{,}15 \text{ K}$

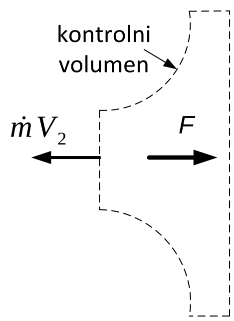
$\rho_1 = 1{,}225 \ \text{kg/m}^3 \qquad \rho_2 = \dfrac{p_2}{RT_2} = \dfrac{101325}{287{,}053 \cdot 833{,}15} = 0{,}4237 \ \text{kg/m}^3$

a) $\dot{m}_1 = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_1 V_1 \dfrac{D_1^2 \pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad V_1 = \dfrac{4\dot{m}_1}{\rho_1 D_1^2 \pi} = \dfrac{4 \cdot 15{,}4}{1{,}225 \cdot 0{,}4^2 \pi} = 100 \ \text{m/s}$

b) $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$

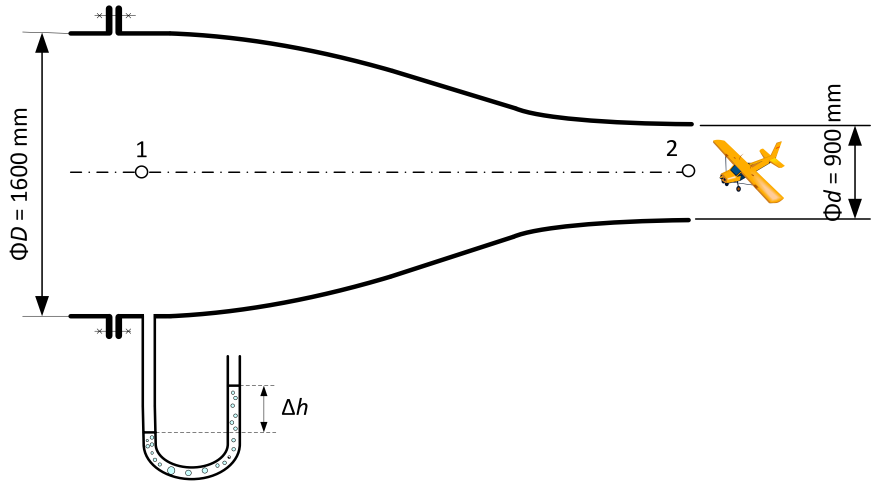
$$\rho_1 V_1 \frac{D_1^2 \pi}{4} = \rho_2 V_2 \frac{D_2^2 \pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad V_2 = V_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 100 \cdot \frac{1{,}225}{0{,}4237} \left(\frac{400}{360}\right)^2 = 357 \ \text{m/s}$$

c) $F = \dot{m} \cdot V_2 = 15{,}4 \cdot 357 = 5497 \ \text{N}$



Mlaznica aerodinamičkog tunela izrađena je u obliku kružne redukcije s promjerom *D* = 1600 mm do promjera *d* = 900 mm. Zrak iz mlaznice nastrujava na maketu zrakoplova u standardnim atmosferskim uvjetima na *h* = 0 m. ˝U˝ cijev ispunjena vodom pokazuje nadtlak od Δ*h* = 150 mm H_2O. Odredi:

- **a) brzinu zraka na izlazu iz mlaznice**
- **b) protok kroz mlaznicu**
- **c) silu u vijcima koji drže mlaznicu**
- **d) skicirati raspored tlaka duž mlaznice**
- **e) kolikom bi silom djelovao mlaz zraka na vertikalni zid koji bi stajao umjesto makete na razmaku većem od d/4.**



Rješenje:

$\boldsymbol{B.J.}$ $1-2$:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_v g h \quad \rightarrow \quad \rho_v g h = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_1^2\right)$$

$\boldsymbol{J.K.}$ $1-2$:

$$V_1 D^2 = V_2 d^2 \quad \rightarrow \quad V_1 = V_2\left(\frac{d}{D}\right)^2$$

$$2\frac{\rho_v}{\rho} g h = V_2^2 - V_2^2\left(\frac{d}{D}\right)^4$$

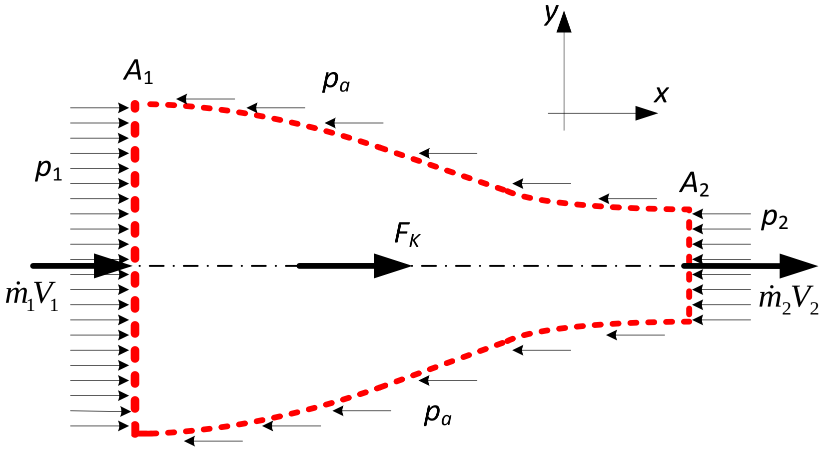
$$2\frac{\rho_v}{\rho} g h = V_2^2\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

a) $$V_2 = \sqrt{\frac{2\rho_v g h}{\rho\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1000\cdot 9{,}81\cdot 0{,}15}{1{,}225\cdot\left[1-\left(\frac{0{,}9}{1{,}6}\right)^4\right]}} = 51{,}7\ \mathrm{m/s}$$

$$V_1 = V_2\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 51{,}7\cdot\left(\frac{0{,}9}{1{,}6}\right)^2 = 16{,}35\ \ \mathrm{m/s}$$

b) $$Q = V_1 A_1 = V_1\frac{D^2\pi}{4} = 16{,}35\cdot\frac{1{,}6^2\pi}{4} = 32{,}9\ \ \mathrm{m^3/s}$$

c)



$\boldsymbol{J.K.G.}$ $1-2$:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\rho\vec{V}\,d\forall}_{\varnothing} + \int_S\left(\rho\vec{V}d\vec{A}\right)\cdot\vec{V} = \underbrace{\vec{F}_G}_{\varnothing} + \vec{F}_p + \vec{F}_K + \underbrace{\vec{F}_o}_{\varnothing}$$

$$-\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - p_a(A_1 - A_2) + \vec{F}_K$$

$$-\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - p_a A_1 + p_a A_2 + \vec{F}_K$$

$$\boxed{-\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_1 + \vec{F}_K}$$

$$\rho V_1^2 A_1 = \dot{m}_1 V_1 = \rho V_1^2\frac{D^2\pi}{4} = 1{,}225\cdot 16{,}35^2\cdot\frac{1{,}6^2\pi}{4} = 658{,}4\ \mathrm{N}$$

$$\rho V_2^2 A_2 = \dot{m}_2 V_2 = \rho V_2^2\frac{d^2\pi}{4} = 1{,}225\cdot 51{,}67^2\cdot\frac{0{,}9^2\pi}{4} = 2080{,}6\ \ \mathrm{N}$$

$$p_2 = 101325\ \mathrm{Pa}$$

$$\Delta p = \rho_v g h = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 = 1471{,}5 \text{ Pa}$$

$$p_1 = p_2 + \Delta p = 101325 + 1471{,}5 = 102796{,}5 \text{ Pa}$$

$$p_1 A_1 = p_1 \frac{D^2 \pi}{4} = 102796{,}5 \cdot \frac{1{,}6^2 \pi}{4} = 206\,685 \text{ N}$$

$$p_2 A_1 = p_2 \frac{D^2 \pi}{4} = 101325 \cdot \frac{1{,}6^2 \pi}{4} = 203\,726 \text{ N}$$

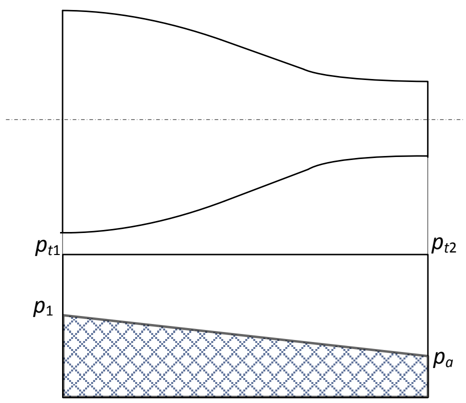
$$-\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_1 + \vec{F}_K$$

$$\vec{F}_K = -\rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2 - p_1 A_1 + p_2 A_1$$

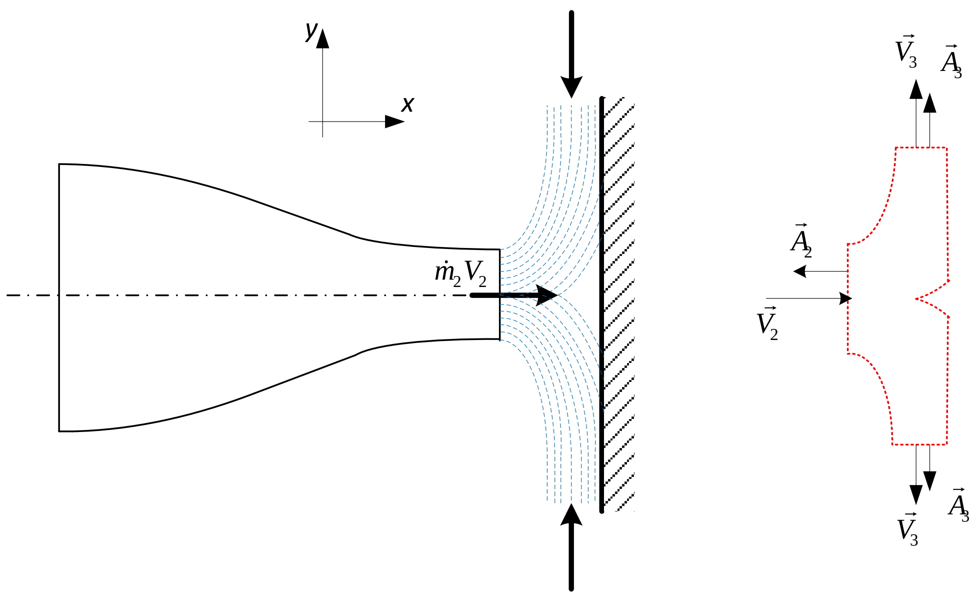
$$\vec{F}_K = -658{,}4 + 2080{,}6 - 206685 + 203726 = -1536{,}8 \text{ N}$$

$$\vec{F}_x = -\vec{F}_K = 1536{,}8 \text{ N}$$

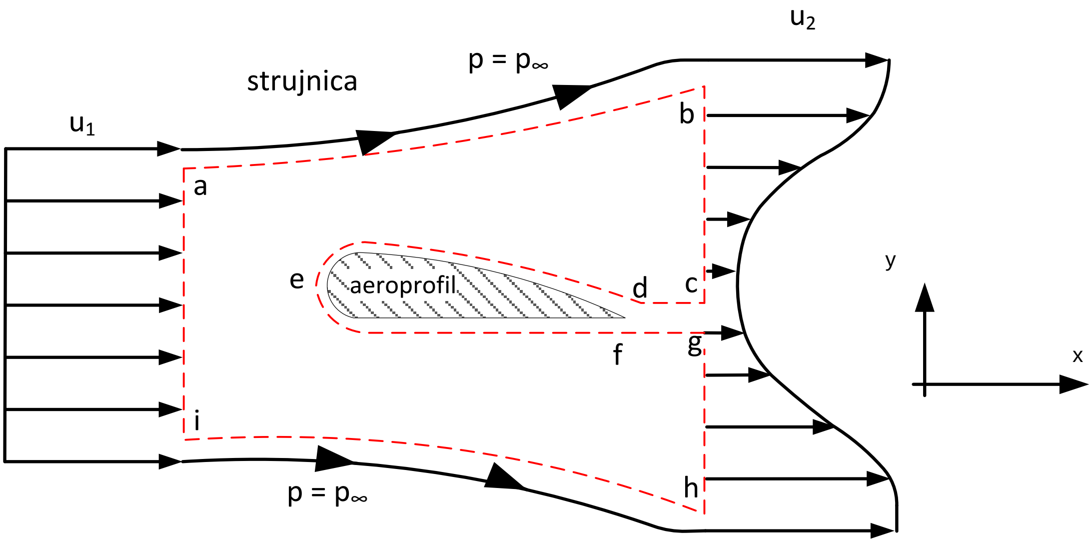
d)



e) $F = \dot{m}_2 V_2 = 2080{,}6 \text{ N}$



2.5 **Odredi silu otpora aeroprofila *F_x* (dvodimenzionalnog tijela) u aerodinamičkom tunelu primjenom jednadžbe održanja količine gibanja.**



Rješenje:

$u_1 = \text{konst}$

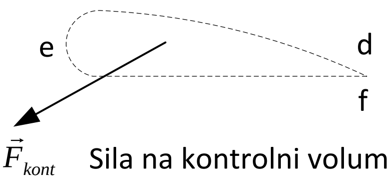
$u_2 = f(y)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall} \rho\vec{V}\,d\forall + \int_{S} (\rho\vec{V}d\vec{A})\cdot\vec{V} = \int_{\forall} \rho\vec{f}\,d\forall - \int_{S} pd\vec{A} + \vec{F}_{visc} + \vec{F}_{kont} + \vec{F}_{osl}$$

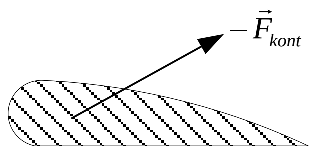
a) $\varnothing$ $\varnothing$ $\varnothing$ $\varnothing$

$$\int_{S} (\rho\vec{V}d\vec{A})\cdot\vec{V} + \int_{S} pd\vec{A} = \vec{F}_{kont}$$

Newton – ov zakon



Sila na kontrolni volumen



Sila na konturi tijela

x: $$\int_S (\rho \vec{V} d\vec{A}) \cdot u + \int_S (p d\vec{A})_x = (F_x)_{kont} = -F_D$$

∅

$$F_D = -\int_S (\rho \vec{V} d\vec{A}) \cdot u$$

$$F_D = -\left[-\int_i^a (\rho_1 u_1 dy) u_1 + \int_h^b (\rho_2 u_2 dy) u_2 \right] = \int_i^a (\rho_1 u_1 dy) u_1 - \int_h^b (\rho_2 u_2 dy) u_2$$

$$J.K. \quad -\int_i^a \rho_1 u_1 dy + \int_h^b \rho_2 u_2 dy = 0$$

$$\int_i^a \rho_1 u_1 dy = \int_h^b \rho_2 u_2 dy \quad \Big/ \cdot u_1$$

$$\int_i^a \rho_1 u_1^2 dy = \int_h^b \rho_2 u_2 u_1 dy$$ uvrstiti u izraz za F_D

$$F_D = \int_h^b \rho_2 u_2 u_1 dy - \int_h^b \rho_2 u_2^2 dy$$

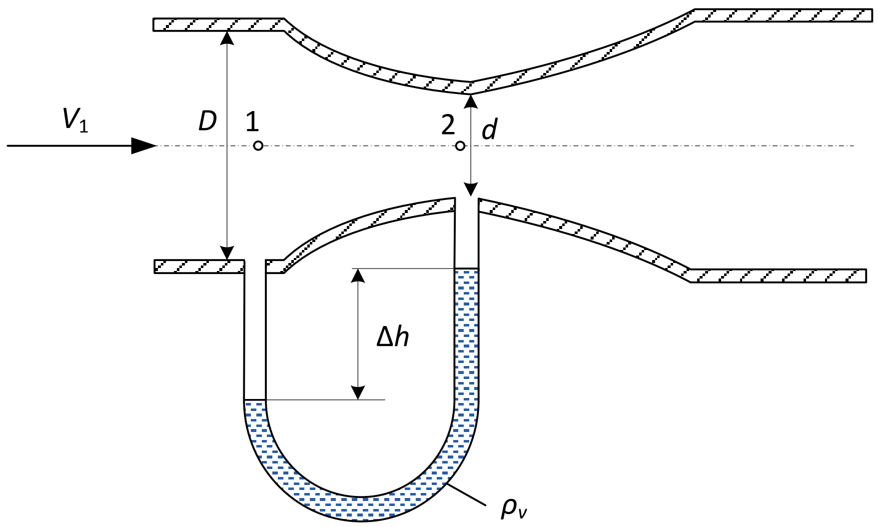
$$F_D = \int_h^b \rho_2 u_2 (u_1 - u_2) dy \qquad \rho = konst \;\rightarrow \boxed{F_D = \rho \int_h^b u_2 (u_1 - u_2) dy}$$

2.6 **Ulazni promjer Venturijeve cijevi iznosi *D* = 250 mm, a promjer na najužem dijelu je *d* = 100 mm. Ako U cijev mjeri razliku u visini vode Δ*h* = 450 mm, a nalazi se na visini *H* = 6000 m odredi:**

a) maseni protok kroz Venturijevu cijev

b) volumni protok

c) brzinu leta (brzinu na ulazu u cijev V_1).



Rješenje:

a) $H = 6000$ m

$\rho = 0{,}6596$ kg/m^3

Jednadžba kontinuiteta:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_1 D^2 = V_2 d^2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{d^2}{D^2}$$

Jednadžba manometra od točke 1 do točke 2:

$$p_1 + \rho g \Delta h = p_2 + \rho_{H_2O} g \Delta h$$

$$p_1 - p_2 = \rho_{H_2O} g \Delta h - \rho g \Delta h = \rho g \Delta h \left(\frac{\rho_{H_2O}}{\rho} - 1\right)$$

Bernoullijeva jednadžba između točaka 1 i 2:

$$p_1+\frac{1}{2}\rho V_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \rightarrow \qquad p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho(V_2^2-V_1^2)$$

$$\frac{1}{2}\rho(V_2^2-V_1^2)=\rho g\Delta h\left(\frac{\rho_{H_2O}}{\rho}-1\right)$$

$$V_2^2\left(1-\frac{V_1^2}{V_2^2}\right)=2g\Delta h\left(\frac{\rho_{H_2O}}{\rho}-1\right)$$

$$V_2^2\left[1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]=2g\Delta h\left(\frac{\rho_{H_2O}}{\rho}-1\right)$$

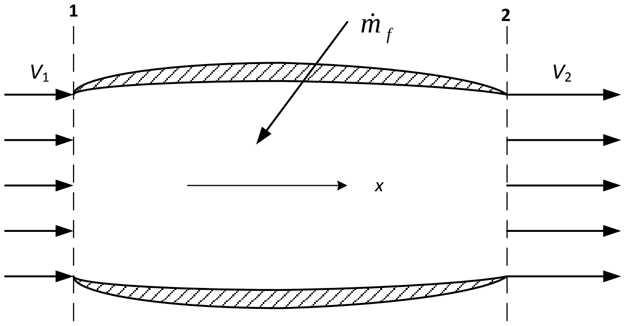
$$V_2=\sqrt{\frac{2g\Delta h\left(\frac{\rho_{H_2O}}{\rho}-1\right)}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}}=\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}45\cdot\left(\frac{1000}{0{,}6596}-1\right)}{1-\left(\frac{0{,}10}{0{,}25}\right)^4}}=117{,}2\ \ \mathrm{m/s}$$

$$\dot{m}=\rho V_2A_2=\rho V_2\frac{d^2\pi}{4}=0{,}6596\cdot 117{,}2\cdot\frac{0{,}1^2\pi}{4}=0{,}607\ \ \mathrm{kg/s}$$

b) $Q\ =V_2A_2=V_2\dfrac{d^2\pi}{4}=78{,}11\cdot\dfrac{0{,}1^2\pi}{4}=0{,}920\ \ \mathrm{m^3/s}$

c) $V_1=V_2\dfrac{d^2}{D^2}=117.2\cdot\dfrac{0.1^2}{0.25^2}=18.75\,\mathrm{m/s}$ $\quad$ (67.5 km/h)

2.7 **Mlazni motor prikazan na slici testira se na ispitnom stolu. Brzina zraka na ulazu je 152,5 m/s, dok ispušni plinovi postižu brzinu od 1066,8 m/s. Tlak zraka na ulazu i tlak ispušnih plinova na izlazu, jednak je atmosferskom tlaku zraka. Odnos količine gorivo/zrak je 1/50, a površina ulazne i izlazne površine motora je jednaka i iznosi 0,186 m^2. Gustoća zraka na ulazu je 1,237 kg/m^3. Odredi silu kojom je potrebno držati motor da bi bio u ravnoteži.**

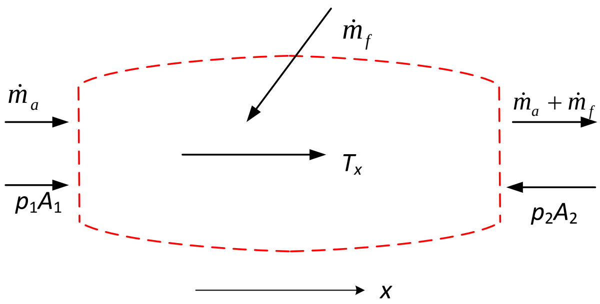


b)

Rješenje:

$A_1 = A_2 = A$

$p_1 = p_2 = p_a$



$J.K.G. \quad \rightarrow \qquad F_x + \dot{m}_a V_1 = (\dot{m}_a + \dot{m}_f) V_2$

$F_x \longrightarrow$ ukupna vanjska sila koja djeluje na motor, a uključuje sile tlaka i silu reakcije na podlogu T_x

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + T_x + \dot{m}_a V_1 = (\dot{m}_a + \dot{m}_f) \cdot V_2$$

$$T_x = (\dot{m}_a + \dot{m}_f) \cdot V_2 - \dot{m}_a V_1 = \left(1 + \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a}\right) \dot{m}_a V_2 - \dot{m}_a V_1 = \left[\left(1 + \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a}\right) V_2 - V_1\right] \dot{m}_a$$

$\dot{m}_a = \rho_1 V_1 A_1$ ... maseni protok zraka kroz motor

$$T_x = \left[\left(1 + \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_a}\right) V_2 - V_1\right] \rho_1 V_1 A_1 = \left[\left(1 + \frac{1}{50}\right) \cdot 1066{,}8 - 152{,}4\right] \cdot 1{,}237 \cdot 0{,}186 \cdot 152{,}4 = 32\,811 \ \text{N}$$

Statički potisak motora bio bi jednak po iznosu i suprotno usmjeren.

3 STANDARDNA ATMOSFERA

Stanje atmosfere značajno se mijenja ovisno o klimatskim uvjetima, godišnjem dobu, visini, a i u tijeku dana. S obzirom da aerodinamičke karakteristike letjelica bitno ovise o gustoći zraka i brzini širenja zvuka u zraku, usvojena je međunarodna standardna atmosfera (*International Standard Atmosphere*, ISA), kako bi se mogle uspoređivati performanse zrakoplova i kalibrirati instrumenti. Standardnu atmosferu propisala je međunarodna organizacija za civilno zrakoplovstvo (*International Civil Aviation Organization*, ICAO) na temelju statističkog uzorka prikupljanog dugi niz godina. U standardnoj atmosferi nema vlage i vlada vertikalna ravnoteža.

U standardnoj atmosferi zadana je promjena temperature T s visinom H.

U troposferi (do 11 km visine), temperatura se smanjuje s gradijentom od 0,0065 po jedinici visine, odnosno svakih kilometar visine temperatura padne za 6,5°C. U stratosferi od 11 do 20 km visine temperatura ostaje konstantna i iznosi 216,6 K (-56,5°C). Pomoću definiranog zakona promjene temperature s visinom u standardnoj atmosferi i zakona vertikalne ravnoteže u zraku, integrirane su jednadžbe koje daju promjenu tlaka s visinom. Uz poznatu promjenu temperature i tlaka jednostavno je tada odrediti i promjenu gustoće s visinom u skladu s jednadžbom stanja plina. Standardni atmosferski uvjeti na razini mora ISA/SL iznose:

$$p_n = 101\ 325\ \mathrm{Pa}$$

$$T_n = 288{,}15\ \mathrm{K}$$

$$\rho_n = 1{,}225\ \mathrm{kg/m^3}$$

3.1 **Izračunaj stanje standardne atmosfere na visinama:**

a) 4 000 m,

b) 14 000 m.

Rješenje:

Uvjeti ISA / SL: $p_n = 101\,325$ Pa ; $T_n = 288{,}15$ K ; $\rho_n = 1{,}225$ kg/m^3 ;

Srednji polumjer Zemljine kugle: $R_0 = 6357$ km

a) $h = 4000$ m

$$H = \frac{R_0}{R_0 + h} \cdot h = \frac{6357 \cdot 10^3}{6357 \cdot 10^3 + 4000} \cdot 4000 = 3997{,}5 \text{ m} \quad \text{... geopotencijalna visina}$$

$$T = T_n - \Delta\,\beta \cdot H \;=\; 288{,}15 - 6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 3997{,}5 \;=\; 262{,}17 \text{ K}$$

$$p = p_n \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{5{,}256} \;=\; 101325 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 3997{,}5)^{5{,}256} \;=\; 61\,656 \text{ Pa}$$

$$\rho = \rho_n \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{4{,}256} \;=\; 1{,}225 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 3997{,}5)^{4{,}256} \;=\; 0{,}819 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0{,}76} \;=\; 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot 262{,}17^{0{,}76} \;=\; 1{,}665 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1{,}665 \cdot 10^{-5}}{0{,}819} = 2{,}032 \cdot 10^{-5} \;\; \text{m}^2/\text{s}$$

b) $h = 14\,000$ m

$$H = \frac{R_0}{R_0 + h} \cdot h = \frac{6357 \cdot 10^3}{6357 \cdot 10^3 + 14000} \cdot 14000 = 13\,969 \text{ m}$$

$$T = T_{11} \;=\; 216{,}65 \text{ K} = -56{,}5\ ^\circ\text{C}$$

$$p = p_{11} \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]} = 22\,627 \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(14000 - 11000)]} = 14\,098 \text{ Pa}$$

$$\rho = \rho_{11} \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]} = 0{,}3639 \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(14000 - 11000)]} = 0{,}227 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0{,}76} \;=\; 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot 216{,}65^{0{,}76} \;=\; 1{,}4403 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1{,}4403 \cdot 10^{-5}}{0{,}227} = 6{,}353 \cdot 10^{-5} \;\; \text{m}^2/\text{s}$$

Na temelju izmjerene temperature +6 °C i tlaka 83 800 Pa, potrebno je odrediti visinu prema:

a) temperaturi,

b) tlaku i

c) gustoći.

Rješenje: $t = 6\,°\text{C} \;\rightarrow\; T = t + 273{,}15 = 6 + 273{,}15 = 279{,}15\ \text{K}$

$p = 83\,800\ \text{Pa}$

a) visina prema temperaturi

$$T = T_n - \beta \cdot H \;\rightarrow\; H = \frac{T_n - T}{\beta} = \frac{288{,}15 - 279{,}15}{6{,}5 \cdot 10^{-3}} = 1384{,}6\ \text{m}$$

$$h = \frac{R_0}{R_0 - H} \cdot H = \frac{6357 \cdot 10^3}{6357 \cdot 10^3 - 1384{,}6} \cdot 1384{,}6 = 1384{,}9\ \text{m}$$

b) visina prema tlaku

$$p = p_n \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{5{,}256} \;\Rightarrow\; \left(\frac{p}{p_n}\right)^{\frac{1}{5{,}256}} = 1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H$$

$$H = \frac{1}{2{,}256 \cdot 10^{-5}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_n}\right)^{\frac{1}{5{,}256}}\right] = \frac{1}{2{,}256 \cdot 10^{-5}} \left[1 - \left(\frac{83\,800}{101\,325}\right)^{\frac{1}{5{,}256}}\right] = 1572{,}9\ \text{m}$$

$$h = \frac{R_0}{R_0 - H} \cdot H = \frac{6357 \cdot 10^3}{6357 \cdot 10^3 - 1572{,}9} \cdot 1572{,}9 = 1573{,}3\ \text{m}$$

c) visina prema gustoći

$$p = \rho \cdot R \cdot T \;\Rightarrow\; \rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{83800}{287{,}053 \cdot 279{,}15} = 1{,}0458\ \text{kg/m}^3$$

$$\rho = \rho_n \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{4{,}256} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\rho}{\rho_n}\right)^{\frac{1}{4{,}256}} = 1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H$$

$$H = \frac{1}{2{,}256 \cdot 10^{-5}} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_n}\right)^{\frac{1}{4{,}256}}\right] = \frac{1}{2{,}256 \cdot 10^{-5}} \left[1 - \left(\frac{1{,}0458}{1{,}225}\right)^{\frac{1}{4{,}256}}\right] = 1617\ \text{m}$$

$$h = \frac{R_0}{R_0 - H} \cdot H = \frac{6357 \cdot 10^3}{6357 \cdot 10^3 - 1617} \cdot 1617 = 1617{,}4\ \text{m}$$

3.3 **Za koliko je veća gustoća suhog zraka u odnosu na zrak potpuno zasićen vodenom parom pri tlaku *p* = 101 325 Pa i temperaturi *t* = 20 °C. Parcijalni tlak vodene pare u potpuno zasićenom zraku iznosi p_{para} = 2337 Pa.**

Rješenje:

$p = 101325$ Pa

$t = 20\,°\mathrm{C} \quad \rightarrow \quad T = t + 273{,}15 = 20 + 273{,}15 = 293{,}15\ \mathrm{K}$

$p_{para} = 2337\ \mathrm{Pa}$

$R_{zrak} = 287{,}053\ \mathrm{J/kgK}$

$R_{para} = 461{,}6\ \mathrm{J/kgK}$

<u>I način</u>

$*$ suhi zrak: $\rho_{sz} = \dfrac{p}{R_{zrak} \cdot T} = \dfrac{101325}{287{,}053 \cdot 293{,}15} = 1{,}2041\ \mathrm{kg/m^3}$ (bez pare u zraku)

$*$ vlažni zrak: $p = p_{zrak} + p_{para} \quad \rightarrow \quad p_{zrak} = p - p_{para} = 101325 - 2337 = 98\,988$ Pa

$p \rightarrow$ ukupan tlak vlažnog zraka

$\rho_{zrak} = \dfrac{p_{zrak}}{R_{zrak} \cdot T} = \dfrac{98988}{287{,}053 \cdot 293{,}15} = 1{,}1763\ \mathrm{kg/m^3}$ ...gustoća suhog zraka u smjesi vlažnog zraka

$\rho_{para} = \dfrac{p_{para}}{R_{para} \cdot T} = \dfrac{2337}{461{,}6 \cdot 293{,}15} = 0{,}0173\ \mathrm{kg/m^3}$ ...gustoća vodene pare u smjesi vlažnog zraka

$\rho_{VZ} = \rho_{zrak} + \rho_{para} = 1{,}1763 + 0{,}0173 = 1{,}1936\ \mathrm{kg/m^3}$ ...gustoća vlažnog zraka

*razlika gustoća: $\Delta\rho = \rho_{SZ} - \rho_{VZ} = 1{,}2041 - 1{,}1936 = 0{,}0105\ \mathrm{kg/m^3}$

$$\Delta\rho\ [\%] = \frac{\Delta\rho}{\rho_{SZ}} \cdot 100 = \frac{0{,}0105}{1{,}2041} \cdot 100 = 0{,}873\ \%$$

II način

$*$ suhi zrak: $\rho_{sz} = \dfrac{p}{R_{zrak} \cdot T} = \dfrac{101325}{287{,}053 \cdot 293{,}15} = 1{,}2041 \text{ kg/m}^3$ (bez pare u zraku)

$*$ vlažni zrak: $\varphi = \dfrac{p_p}{p_{pz}} = \dfrac{2337}{98988} = 0{,}0236$

p_{pz} ...parcijalni tlak pare

$$\rho_{VZ} = \frac{p_a}{R_n T} - \frac{\varphi \cdot p_{pz}}{T}\left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_p}\right)$$

$$\rho_{VZ} = \frac{101325}{287{,}053 \cdot 293{,}15} - \frac{0{,}0236 \cdot 98988}{293{,}15}\left(\frac{1}{287{,}053} - \frac{1}{461{,}6}\right) = 1{,}1936 \text{ kg/m}^3$$

*razlika gustoća: $\Delta\rho = \rho_{SZ} - \rho_{VZ} = 1{,}2041 - 1{,}1936 = 0{,}0105 \text{ kg/m}^3$

$$\Delta\rho\,[\%] = \frac{\Delta\rho}{\rho_{VZ}} \cdot 100 = \frac{0{,}0105}{1{,}2041} \cdot 100 = 0{,}87\ \%$$

* $F_Z \propto \rho$ $\rightarrow$ smanjenje gustoće zraka uzrokuje smanjenje sile uzgona

* $F_T \propto \rho$ $\rightarrow$ smanjenje gustoće zraka (manja količina kisika) rezultira manjom silom potiska, odnosno manjom snagom motora

3.4 **Odredi visinu po tlaku, gustoći i temperaturi, na osnovu izmjerenog tlaka od 20 000 Pa i temperature 4˚C uz pretpostavku standardnih atmosferskih uvjeta.**

Rješenje:

Izmjereni tlak zraka od 20 000 Pa u standardnim atmosferskim uvjetima odgovara visini po tlaku iznad 11 km, pa se primjenjuju jednadžbe koje vrijede za niže dijelove stratosfere od 11 do 20 km:

$$p = p_{11} \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]} = 22\,630 \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]}$$

$$\rho = \rho_{11} \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]} = 0{,}3639 \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]}$$

$$T = T_{11} = 216{,}65 \text{ K}$$

a) Visina po tlaku

$$p = 22\,630 \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]}$$

$$\frac{p}{22\,630} = e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]}$$

$$-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000) = \ln\left(\frac{p}{22\,630}\right) \quad / \div (-1{,}577 \cdot 10^{-4})$$

$$H = -6341{,}15 \cdot \ln\left(\frac{p}{22\,630}\right) + 11\,000 = -6341{,}15 \cdot \ln\left(\frac{20\,000}{22\,630}\right) + 11\,000 = 11\,784 \text{ m}$$

b) Visina po gustoći

$$\rho = 0{,}3639 \cdot e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]}$$

$$\frac{\rho}{0{,}3639} = e^{[-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000)]}$$

$$-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11\,000) = \ln\left(\frac{\rho}{0{,}3639}\right)$$

$$H = -6341{,}15 \cdot \ln\left(\frac{\rho}{0{,}3639}\right) + 11\,000$$

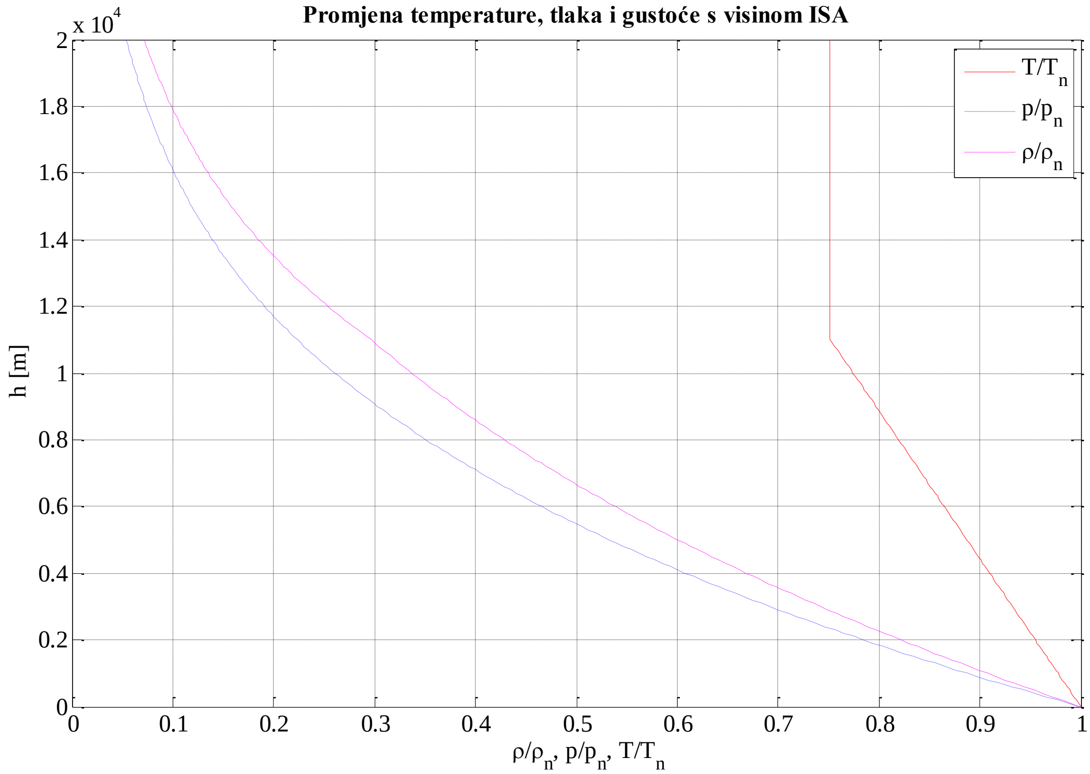
Gustoća zraka može se odrediti pomoću jednadžbe stanja na temelju izmjerenog tlaka i temperature zraka.

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{20\,000}{287{,}053 \cdot 277{,}15} = 0{,}2514 \text{ kg/m}^3$$

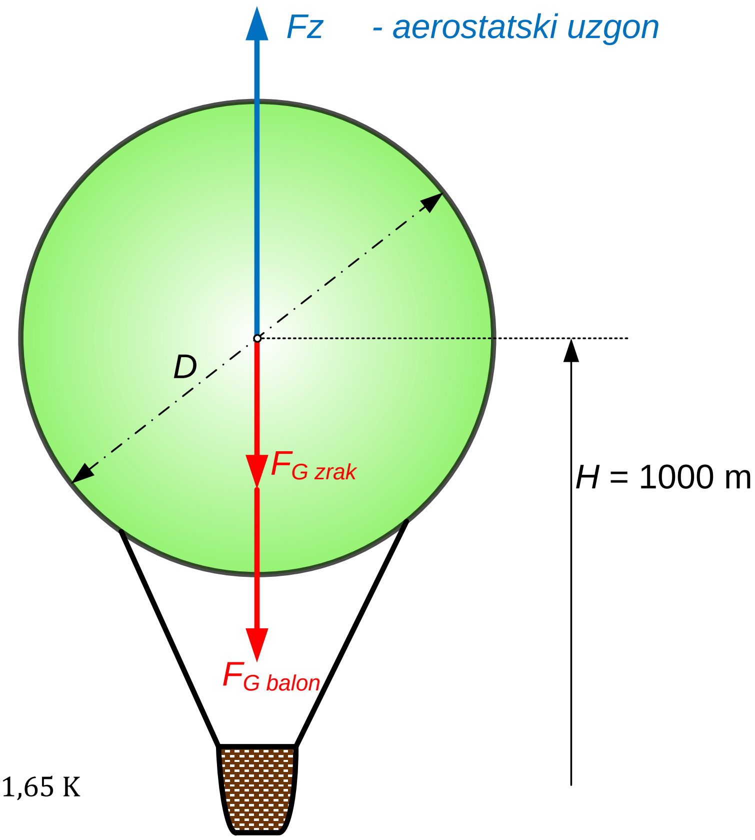
$$H = -6341{,}15 \cdot \ln\left(\frac{0{,}2514}{0{,}3639}\right) + 11\,000 = 13\,345 \text{ m}$$

c) Visina po temperaturi – ne može se odrediti jer je temperatura konstantna u rasponu visina od 11 do 20 km u uvjetima standardne atmosfere.

$$T = T_{11} = 216{,}65 \text{ K}$$



3.5 **Balon ukupne mase 500 kg i promjera sfere 20 m nalazi se na visini 1000 m u uvjetima standardne atmosfere. Balon je ispunjen zrakom povišene temperature koji se grije plamenom s donje strane (otvoren prema atmosferi). Smatrajući da je zrak u balonu idealno izmiješan, odredi temperaturu zraka da balon bude u ravnoteži.**



Rješenje:

$H = 1000 \text{ m}$

$D = 20 \text{ m}$

$m = 500 \text{ kg}$

Temperatura, tlak i gustoća zraka na 1000 m:

$$T = T_n - \beta \cdot H = 288{,}15 - 6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 281{,}65 \text{ K}$$

$$p = p_n(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{5{,}256} = 10325 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 1000)^{5{,}256} = 89\,873 \text{ Pa}$$

$$\rho = \rho_n(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{4{,}256} = 1{,}225(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 1000)^{4{,}256} = 1{,}1116 \text{ kg/m}^3$$

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6}\pi \cdot 20^3 = 4189 \text{ m}^3$$ ... volumen zraka u balonu

$$F_Z = F_{G\,zrak} + F_{G\,balon}$$ ... jednadžba ravnoteže sila na balon

$$\rho g V = \rho_{zrak} g V + mg / \div gV$$

$$\rho_{zrak} = \rho - \frac{m}{V} = 1{,}1116 - \frac{500}{4189} = 0{,}9922 \text{ kg/m}^3$$ ... gustoća toplog zraka u balonu

$$T_{zrak} = \frac{p}{\rho_{zrak} \cdot R} = \frac{89\,873}{0{,}9922 \cdot 287{,}053} = 315{,}5 \text{ K} \quad (42{,}4\ ^\circ\text{C})$$

3.6

Zrakoplov leti na visini 3000 m u uvjetima standardne atmosfere. Brzinomjer koji je kalibriran prema nestlačivom strujanju na nultoj nadmorskoj razini pokazuje brzinu 280 km/h. Odredi stvarnu brzinu zrakoplova u slučajevima idealnog (bez greške) instrumenta ako je:

a) točno mjerenje statičkog tlaka

b) postoji pogreška pri mjerenju statičkog tlaka:

$$\varepsilon = \frac{p_{mjereno} - p_{stvarno}}{p_{stvarno}} = \pm 2\ \%.$$

Rješenje:

U standardnim atmosferski uvjetima na visini 3000 m, tlak i gustoća zraka su:

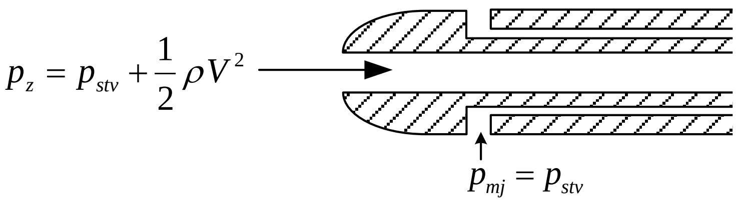
$$p = p_n(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{5{,}256} = 101325 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 3000)^{5{,}256} = 70105\ Pa$$

$$\rho = \rho_n(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{4{,}256} = 1.225 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 3000)^{4{,}256} = 0{,}9091\ \text{kg/m}^3$$

U slučaju idealnog instrumenta indicirana brzina zrakoplova (*Indicated Airspeed*, IAS) koju pilot očitava na brzinomjeru (*Airspeed Indicator*) jednaka je ekvivalentnoj brzini (*Equivalent Airspeed*, EAS).

a) $V_i = V_e = 280\ \text{km/h}$

$$p_z - p_{stv} = p_d$$



Razlika zaustavnog i statičkog tlaka koristi se za određivanje brzine leta zrakoplova tako da se stvarna vrijednost dinamičkog tlaka $p_d = \rho V^2/2$ kalibrira pomoću gustoće zraka u ISA/SL uvjetima ρ_n.

$$p_z - p_{stv} = \frac{1}{2}\rho_n V_e^2$$

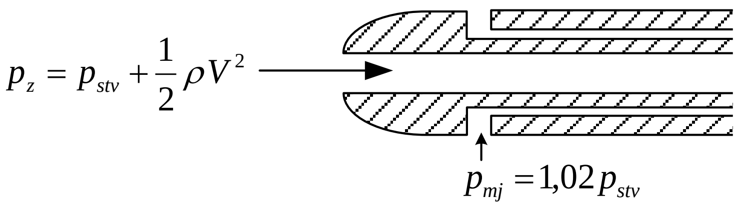
$$p_{stv} + \frac{1}{2}\rho V^2 - p_{stv} = \frac{1}{2}\rho_n V_e^2$$

$$V = V_e\sqrt{\rho_n/\rho} = 280\sqrt{1{,}225/0{,}9091} = 325\ \text{km/h} = 90{,}3\ \text{m/s}$$

b) $\dfrac{p_{mj} - p_{stv}}{p_{stv}} = \pm 2\ \% = 0{,}02$

$$p_{mj} - p_{stv} = 0{,}02 \cdot p_{stv}$$

$$p_{mj} = 1{,}02 p_{stv}$$



$$p_{stv} + \frac{1}{2}\rho V^2 - p_{mj} = \frac{1}{2}\rho_n V_e^2$$

$$p_{stv} + \frac{1}{2}\rho V^2 - 1{,}02 p_{stv} = \frac{1}{2}\rho_n V_e^2$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = \frac{1}{2}\rho_n V_e^2 + 0{,}02 p_{stv} \;\Big/ \frac{2}{\rho}$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{2}\rho_n V_e^2 + 0{,}02 p_{stv}\right)} = \sqrt{\frac{2}{0{,}9091}\left(\frac{1}{2}\cdot 1{,}225 \cdot \left(\frac{280}{3{,}6}\right)^2 + 0{,}02 \cdot 70105\right)} = 106 \ \mathrm{m/s}$$

3.7 **Zrakoplov leti u uvjetima standardne atmosfere. Visinomjer zrakoplova pokazuje visinu po tlaku od 5200 m. Indicirana brzina na idealnom instrumentu (bez greške) koji je baždaren u uvjetima standardne atmosfere na *H* = 0 m pokazuje brzinu 200 km/h. Odredi:**

- **a) uvjete okolne atmosfere**
- **b) stvarnu brzinu zrakoplova**
- **c) brzinu zvuka**
- **d) Machov broj.**

Rješenje:

a) uvjeti okolne atmosfere (tlak, temperatura i gustoća zraka)

$$p = p_n(1 - 2{,}256\cdot 10^{-5} \cdot H)^{5{,}256} = 101325 \cdot (1 - 2{,}256\cdot 10^{-5} \cdot 5200)^{5{,}256} = 52587 \ \mathrm{Pa}$$

$$T = T_n - \beta \cdot H = 288{,}15 - 6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 5200 = 254{,}35 \ \mathrm{K} \ \ (t = -18{,}8 \ ^\circ\mathrm{C})$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{52587}{287{,}053 \cdot 254{,}35} = 0{,}720 \ \mathrm{kg/m^3}$$

b) stvarna brzina zrakoplova V

$$\frac{1}{2}\rho_n V_e^2 = \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$\mathrm{V} = V_e\sqrt{\frac{\rho_n}{\rho}} = \frac{200}{3{,}6}\sqrt{\frac{1{,}225}{0{,}720}} = 72{,}5 \ \ \mathrm{m/s}$$

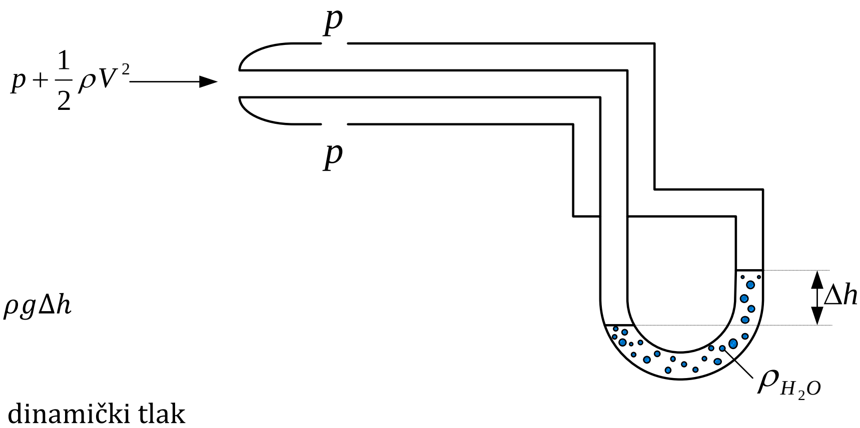
$$(261 \ \mathrm{km/h})$$

c) $a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 254{,}35} = 319{,}7 \ \mathrm{m/s}$

d) $Ma = V/a = 72{,}5/319{,}7 = 0{,}227$

3.8

Zrakoplov leti na visini *h* = 5000 m. Indikator brzine zrakoplova koji je umjeren (baždaren) u uvjetima standardne atmosfere na *h* = 0 m pokazuje brzinu V_i = 350 km/h. Ako je brzinomjer tipa Pitot-Prandtl odredi stvarnu brzinu zrakoplova i Machov broj.



Rješenje:

$$p+\frac{1}{2}\rho V^2 = p+\rho g\Delta h$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho V^2 \quad \rightarrow \quad \text{dinamički tlak}$$

<u>I način:</u>

$$h = 0 \text{ m}$$

$$\rho_n = 1{,}225 \ \text{kg/m}^3$$

$$V_i = V_e = 350 \cdot \frac{1000}{3600} = 97{,}2 \text{ m/s}$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho_n V_i^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}225 \cdot 97{,}2^2 = 5789{,}2 \text{ Pa}$$

$$h = 5000 \text{ m}$$

$$\rho_a = 0{,}7364 \ \text{kg/m}^3$$

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho_a V^2 \ \Longrightarrow \text{V} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5789{,}2}{0{,}7364}} = 125{,}4 \ \text{m/s}$$

<u>II način:</u>

$$\rho_n V_e^2 = \rho V^2 \ \Rightarrow \ \text{V} = V_e\sqrt{\frac{\rho_n}{\rho}} = 97{,}2\cdot\sqrt{\frac{1{,}225}{0{,}7364}} = 125{,}4 \ \text{m/s}$$

Pogreška: $\Delta V = V_i - V = 97{,}2 - 125{,}4 = -28{,}2 \text{ m/s}$

$$\Delta V[\%] = \frac{\Delta V}{V} = \frac{-28{,}2}{125{,}4}\cdot 100 = -22{,}5\ \%$$

$$Ma = \frac{V}{a}; \ \kappa = 1{,}4; \ \ R = 287{,}053 \ \text{J/kg K}; \ \ T = \frac{p}{\rho R}$$

$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{\kappa R \frac{p}{\rho R}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{1{,}4 \cdot \frac{54048{,}3}{0{,}7364}} = 320{,}6 \ \text{m/s}^2$$

$$Ma = \frac{V}{a} = \frac{125{,}4}{320{,}6} = 0{,}391$$

3.9 **Zrakoplov leti na visini *H* = 6000 m, brzinom *V* = 400 km/h. Odredi:**

a) statički tlak okolne atmosfere

b) dinamički tlak

c) totalni tlak

d) ekvivalentnu brzinu zrakoplova

e) Machov broj.

Rješenje:

a) $p_a = p_n(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{5{,}256} = 101325 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 6000)^{5{,}256} = 47176 \ \text{Pa}$

b) $p_d = \frac{1}{2}\rho_a V^2$

$$\rho_a = \rho_n(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{4{,}256} = 1{,}225 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 6000)^{4{,}256} = 0{,}6596 \ \text{kg/m}^3$$

$$p_d = \frac{1}{2}\rho_a V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}6596 \cdot \left(\frac{400}{3{,}6}\right)^2 = 4071{,}6 \ \text{Pa}$$

c) $p = p_a + p_d = 47176 + 4071{,}6 = 51\,247{,}6 \ \text{Pa}$

d) $\rho_n V_e^2 = \rho_a V^2$

$$V_e = V\sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_n}} = \frac{400}{3{,}6} \cdot \sqrt{\frac{0{,}6596}{1{,}225}} = 81{,}5 \ \text{m/s}$$

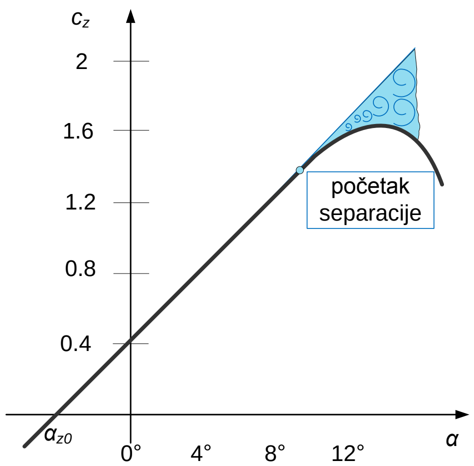
e) $T_a = T_n - \beta \cdot H = 288{,}15 - 6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 6000 = 249{,}15 \ \text{K} \ \ (t = -24 \ °\text{C})$

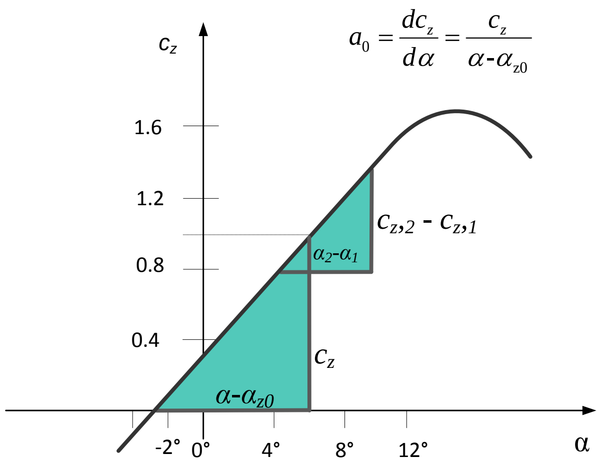
$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 249{,}15} = 316{,}4 \ \text{m/s}^2$$

$$Ma = \frac{V}{a} = \frac{400/3{,}6}{316{,}4} = 0{,}351$$

4 AEROPROFILI

Aeroprofil predstavlja presjek krila, kraka propelera ili lopatice kompresora i turbine u motoru. Pri određivanju sila i momenata aeroprofil ima iste karakteristike kao i beskonačno krilo. Aeroprofil prema tome predstavlja isječak jedinične širine iz krila beskonačnog raspona. U zračnom tunelu se aeroprofil postavlja između dva zida kako bi se odredile njegove karakteristike bez utjecaja prestrujavanja na vrhovima krila. Strujanje oko aeroprofila je dvodimenzionalno, što znači da se jednaka slika strujanja ponavlja u svakom presjeku xz ravnine. Američka NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) prije zvana NACA (*National Advisory Commitee for Aeronautics*) testirala je brojne aeroprofile i razvila sistematičnu seriju presjeka koja je predstavljena u NACA Report No. 824, *Summary of Airfoil Data*. NACA aeroprofili podijeljeni su u šest serija s obzirom na značenje oznaka koje su kombinacija teoretskih, geometrijskih i eksperimentalno određenih karakteristika pojedinog aeroprofila. Tipična promjena koeficijenta uzgona c_z sa napadnim kutom α prikazana je na slici 4.1. Pri malim i srednjim napadnim kutovima c_z se linearno mijenja sa promjenom α. Nagib krivulje uzgona u linearnom dijelu obilježava se sa m_0. Strujnice zraka prate površinu aeroprofila gotovo cijelom dužinom pa je opstrujavanje glatko.

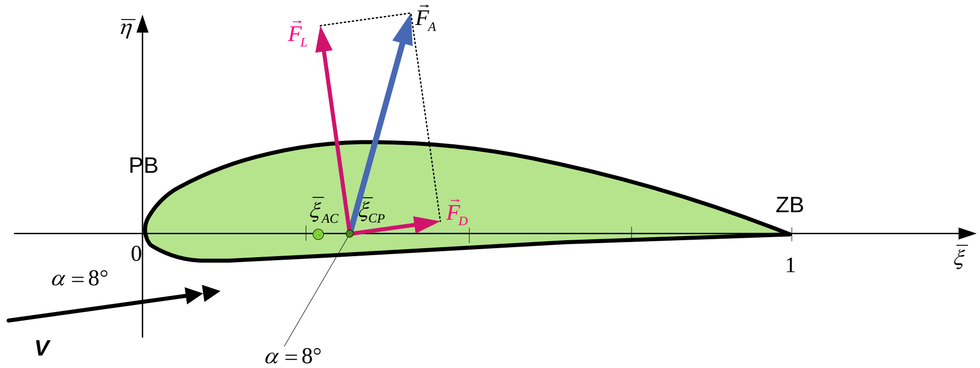


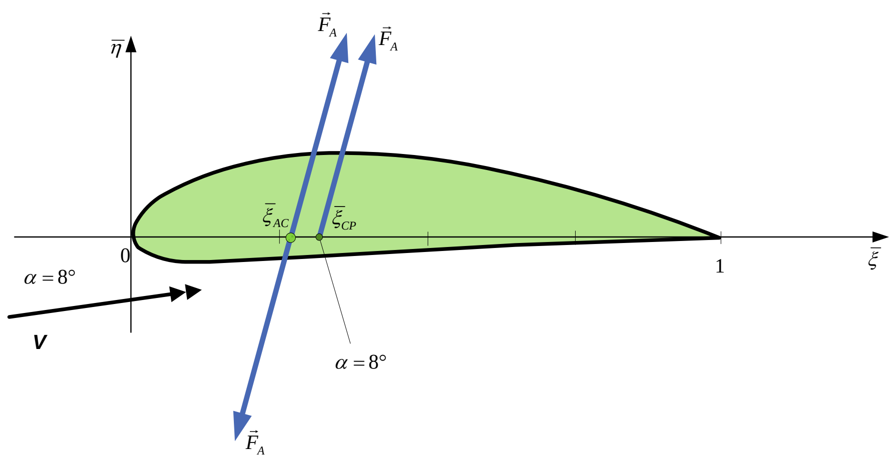


Pri većim napadnim kutovima, struja zraka nastoji se odvojiti od gornje površine aeroprofila pri čemu dolazi do vrtloženja strujnica na zadnjem dijelu aeroprofila. To odvajanje nastaje zbog viskoznosti fluida o čemu će biti riječ u poglavlju 8. Zbog odvajanja pri velikim napadnim kutovima dolazi do pada c_z i velikog porasta koeficijenta otpora c_x. Kaže se da je došlo do sloma uzgona (*stall*). Maksimalna vrijednost koeficijenta uzgona neposredno prije sloma uzgona označava se sa $c_{z\,max}$ i predstavlja kritični parametar s obzirom da određuje brzinu stall-a zrakoplova V_{stall}. Što je veći $c_{z\,max}$, manja je brzina V_{stall}. Pri malim napadnim kutovima definirane su još neke bitne karakteristike aeroprofila. Koeficijent uzgona kada je napadni kut $\alpha = 0$ ima neku konačnu vrijednost, odnosno aeroprofil je potrebno postaviti pod neki negativni napadni kut da bi uzgon bio nula. Napadni kut pri kojem nema uzgona naziva se *kut nultog uzgona* i obilježava sa α_{z0}. Simetrični aeroprofili imaju $\alpha_{z0} = 0$, dok pozitivno zakrivljeni aeroprofili (oni čija je srednjaka iznad tetive) obično imaju mali negativni kut nultog uzgona. Prema tome, α_{z0} predstavlja mjeru zakrivljenosti aeroprofila. Što je apsolutna vrijednost $|\alpha_{z0}|$ veća, veća je i zakrivljenost aeroprofila.

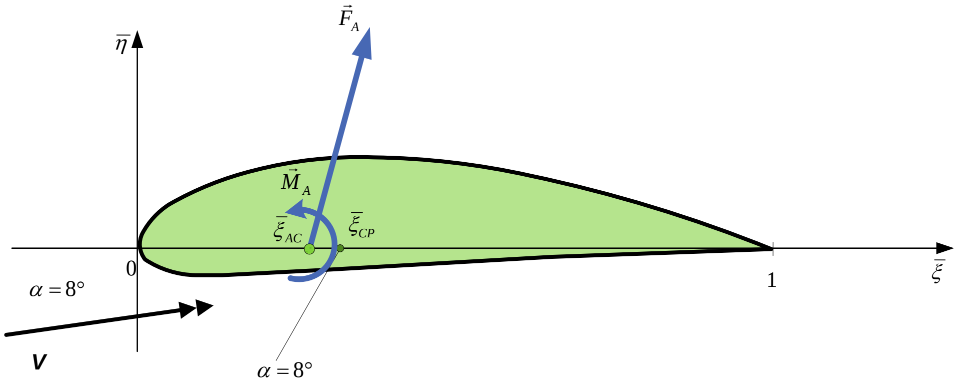
MOMENT OKO TOČKE NA AEROPROFILU

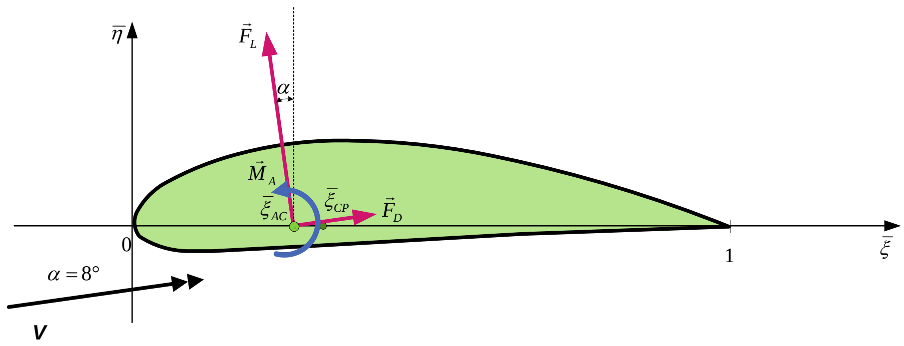
Ukupna aerodinamička sila djeluje u centru potiska CP (*center of pressure*) koji se nalazi na udaljenosti $\bar{\xi}_{CP}$ od prednjeg brida PB aeroprofila. Položaj centra potiska mijenja se s promjenom napadnog kuta kod nesimetričnih aeroprofila. Ideja je svesti djelovanje aerodinamičke sile na neku drugu točku aeroprofila koja se neće mijenjati s promjenom napadnog kuta. Ta točka naziva se aerodinamički centar AC (*aerodynamic center*) i za podzvučne aeroprofile nalazi se približno na 1/4 tetive aeroprofila *c*.





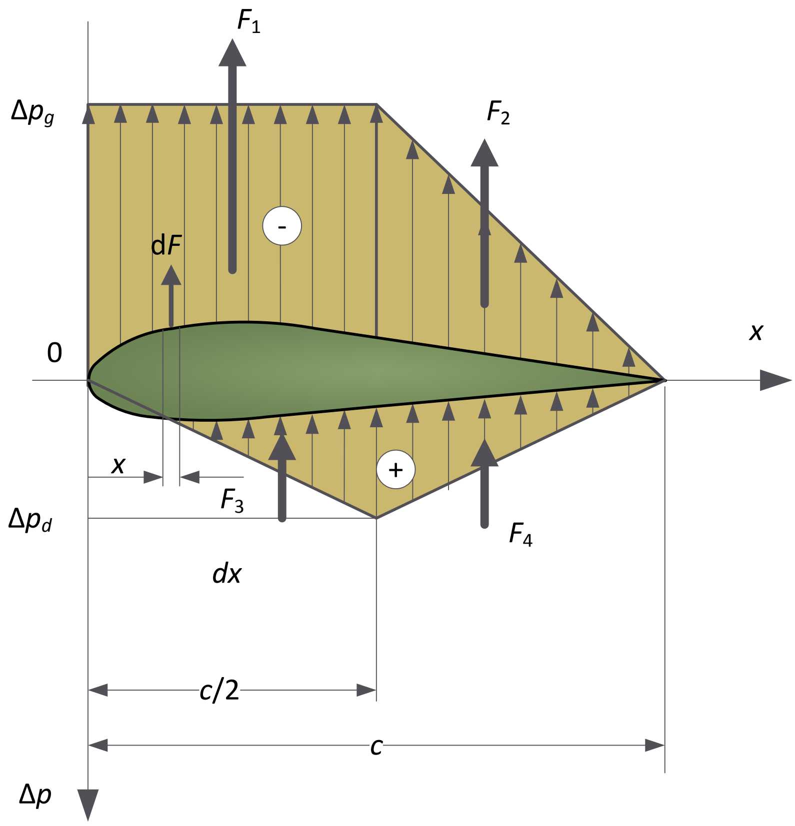
Rezultat svođenja djelovanja aerodinamičke sile iz CP u AC je dodatni moment propinjanja oko AC. Moment oko AC pozitivno zakrivljenih podzvučnih aeroprofila je negativan - spušta nos zrakoplova, odnosno smanjuje napadni kut α .





4.1 **Raspored tlaka na gornjaci i donjaci aeroprofila pri nultom napadnom kutu, standardnim uvjetima na razini mora i brzini strujanja od 180 km/h dan je na slici. Relativni tlakovi iznose Δp_g = –100 mm H_20 i Δp_d = 50 mm H_20. Duljina tetive je 1 m. Odredi:**

- **a) silu uzgona po jedinici raspona krila,**
- **b) koeficijent uzgona,**
- **c) moment oko napadnog brida,**
- **d) centar potiska.**



Rješenje:

$V = 180 \text{ km/h } = 180/3{,}6 = 50 \text{ m/s}$

$\Delta p_g = -100 \text{ mm H}_2 0 \quad \rightarrow \quad \Delta p_g = \rho_v g h \; = \; 1000 \cdot 9{,}81 \cdot (-0{,}1) = -981 \text{ Pa}$

$\Delta p_d = 50 \text{ mm H}_2 0 \quad \rightarrow \quad \Delta p_d = \rho_v g h \; = \; 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05 = 490{,}5 \text{ Pa}$

$H = \; 0 \text{ m} \quad \rightarrow p \; = 101325 \text{ Pa}, \qquad \rho = \; 1{,}225 \;\; \text{kg/m}^3$

$c = 1 \text{ m}$

Sila na prvoj polovini gornjake aeroprofila ($0 \leq x \leq c/2$): $\Delta p_1 = \Delta p_g$

$$F_1 = \int_0^{c/2} \Delta p_1 \cdot 1 \cdot dx = \Delta p_g \int_0^{c/2} dx = \Delta p_g \cdot x \Big|_0^{c/2} = \Delta p_g \cdot \frac{c}{2} = -981 \cdot \frac{1}{2} = -490{,}5 \text{ N}$$

Sila na drugoj polovini gornjake aeroprofila ($c/2 \leq x \leq c$): $\Delta p_2 = 2\Delta p_g \left(1 - \frac{x}{c}\right)$

$$F_2 = \int_{\frac{c}{2}}^{c} \Delta p_2 \cdot 1 \cdot dx = \int_{\frac{c}{2}}^{c} 2\Delta p_g \left(1 - \frac{x}{c}\right) dx = 2\Delta p_g \cdot \left(x - \frac{x^2}{2c}\right)\Big|_{c/2}^{c} =$$

$$= 2\Delta p_g \cdot \left[c - \frac{c^2}{2c} - \frac{c}{2} + \frac{(c/2)^2}{2c}\right] = 2\Delta p_g \cdot \frac{c}{8} = 2 \cdot (-981) \cdot \frac{1}{8} = -245{,}25 \text{ N}$$

Sila na prvoj polovini donjake aeroprofila ($0 \leq x \leq c/2$): $\Delta p_3 = \frac{2\Delta p_\mathrm{d}}{\mathrm{c}} \cdot \mathrm{x}$

$$F_3 = \int_0^{\frac{c}{2}} \Delta p_3 \cdot 1 \cdot dx = \Delta p_g \int_0^{\frac{c}{2}} \frac{2\Delta p_d}{c} x dx = \frac{2\Delta p_d}{c} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\mathrm{c}/2} = \frac{2\Delta p_d}{c} \cdot \frac{c^2}{4 \cdot 2} = \frac{\Delta p_d \cdot c}{4}$$

$$= \frac{490{,}5 \cdot 1}{4} = 122{,}625 \text{ N}$$

Sila na drugoj polovini donjake aeroprofila ($c/2 \leq x \leq c$): $\Delta p_4 = 2\Delta p_d \left(1 - \frac{x}{c}\right)$

$$F_4 = \int_{c/2}^{c} \Delta p_4 \cdot 1 \cdot dx = \int_{c/2}^{c} 2\Delta p_d \left(1 - \frac{x}{c}\right) dx = 2\Delta p_d \cdot \left(x - \frac{x^2}{2c}\right)\Big|_{c/2}^{c}$$

$$= 2\Delta p_d \cdot \left[c - \frac{c^2}{2c} - \frac{c}{2} + \frac{(c/2)^2}{2c}\right] = 2\Delta p_d \cdot \frac{c}{8} = 2 \cdot 490{,}5 \cdot \frac{1}{8} = 122{,}625 \text{ N}$$

a) Sila uzgona dobiva se zbrajanjem sila na pojedinim sekcijama površine aeroprofila, negativni predznaci sila na gornjaci uzeti su u obzir na slici i određuju smjer djelovanja sila tako da se u donjoj jednadžbi uvrštavaju apsolutne vrijednosti:

$$F_z = |F_1| + |F_2| + F_3 + F_4 = 490{,}5 + 245{,}25 + 122{,}25 + 122{,}625 = 981 \text{ N}$$

b) $F_z = C_z \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot A = C_z \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot c \cdot 1 \quad \rightarrow \quad C_z = \frac{2F_z}{\rho V^2 c} = \frac{2 \cdot 981}{1{,}225 \cdot 50^2 \cdot 1} = 0{,}641$

c) Momenti koji povećavaju napadni kut aeroprofila imaju pozitivan predznak, a oni koji ga smanjuju negativan. Negativan predznak tlakova Δp_g uzet je u obzir smjerom sila F_1 i F_2 pa se u donjim jednadžbama uvrštava njihova apsolutna vrijednost.

$$M_0 = -\int_0^{c/2} \Delta p_1(x) \cdot 1 \cdot xdx - \int_{c/2}^{c} \Delta p_2(x) \cdot 1 \cdot xdx - \int_0^{c/2} \Delta p_3(x) \cdot 1 \cdot xdx - \int_{c/2}^{c} \Delta p_4(x) \cdot 1 \cdot xdx$$

$$M_0 = -|\Delta p_g| \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{c/2} - \int_{c/2}^{c} 2 \cdot |\Delta p_g| \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right) \cdot xdx - \int_0^{c/2} \frac{2\Delta p_d}{c} \cdot x \cdot xdx - \int_{c/2}^{c} 2\Delta p_d \left(1 - \frac{x}{c}\right) \cdot xdx$$

$$M_0 = -|\Delta p_g| \cdot \left(\frac{c^2}{4 \cdot 2}\right) - 2|\Delta p_g| \int_{c/2}^{c} \left(x - \frac{x^2}{c}\right) dx - \frac{2\Delta p_d}{c} \int_0^{c/2} x^2 dx - 2\Delta p_d \int_{c/2}^{c} \left(x - \frac{x^2}{c}\right) dx$$

$$M_0 = -|\Delta p_g| \cdot \frac{c^2}{8} - 2|\Delta p_g| \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot c}\right)\Bigg|_{c/2}^{c} - \frac{2\Delta p_d}{c} \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{c/2} - 2\Delta p_d \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot c}\right)\Bigg|_{c/2}^{c}$$

$$M_0 = -|\Delta p_g| \cdot \frac{c^2}{8} - 2|\Delta p_g| \cdot \left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{3 \cdot c} - \frac{c^2}{4 \cdot 2} + \frac{c^3}{8 \cdot 3 \cdot c}\right) - \frac{2\Delta p_d}{c} \cdot \left(\frac{c^3}{8 \cdot 3}\right) -$$

$$-2\Delta p_d \left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{3 \cdot c} - \frac{c^2}{4 \cdot 2} + \frac{c^3}{8 \cdot 3 \cdot c}\right) =$$

$$M_0 = -|\Delta p_g| \cdot \frac{c^2}{8} - 2|\Delta p_g| \cdot \frac{c^2}{12} - \Delta p_d \frac{c^2}{12} - 2|\Delta p_d| \cdot \frac{c^2}{12}$$

$$M_0 = -981 \cdot \frac{1^2}{8} - 2 \cdot 981 \cdot \frac{1^2}{12} - 490{,}5 \cdot \frac{1^2}{12} - 2 \cdot 490{,}5 \cdot \frac{1^2}{12} = -408{,}75 \text{ Nm}$$

d) $M_0 = -F_z \cdot x_{CP} \quad \Rightarrow \quad x_{CP} = \frac{-M_0}{F_z} = \frac{408{,}75}{981}$

$$\bar{x}_{CP} = \frac{x_{CP}}{c} = \frac{0{,}4167}{1} = 0{,}4167 = 41{,}67\ \%$$

Rješenje na drugi način

Zadatak se može riješiti i tako da se izračunaju srednji tlakovi na pojedinim sekcijama aeroprofila:

$$\Delta\bar{p}_1 = \Delta p_g = -981 \text{ Pa}; \ \Delta\bar{p}_2 = \frac{\Delta p_g}{2} = \frac{-981}{2} = -490{,}5 \text{ Pa};$$

$$\Delta\bar{p}_3 = \Delta\bar{p}_4 = \frac{\Delta p_d}{2} = \frac{490{,}5}{2} = 245{,}25 \text{ Pa}$$

$$F_1 = \Delta\bar{p}_1 \cdot \frac{c}{2} \cdot 1 = -981 \cdot \frac{1}{2} = -490{,}5 \text{ N}$$

$$F_2 = \Delta\bar{p}_2 \cdot \frac{c}{2} \cdot 1 = -490{,}5 \cdot \frac{1}{2} = -245{,}25 \text{ N}$$

$$F_3 = \Delta\bar{p}_3 \cdot \frac{c}{2} \cdot 1 = 245{,}25 \cdot \frac{1}{2} = 122{,}625 \text{ N}$$

$$F_4 = \Delta\bar{p}_4 \cdot \frac{c}{2} \cdot 1 = 245{,}25 \cdot \frac{1}{2} = 122{,}625 \text{ N}$$

$$F_z = |F_1| + |F_2| + F_3 + F_4 = 490{,}5 + 245{,}25 + 122{,}25 + 122{,}625 = 981 \text{ N}$$

Kod izračuna momenta ili centra potiska treba znati da je hvatište sile u težištu lika koji opisuje raspodjelu tlaka na promatranoj sekciji aeroprofila (to se može pokazati i integriranjem):

$$M_0 = -|F_1| \cdot \mathrm{x}_1 - |F_2| \cdot \mathrm{x}_2 - F_3 \cdot \mathrm{x}_3 - F_4 \cdot \mathrm{x}_4$$

$$M_0 = -|F_1| \cdot \frac{\mathrm{c}}{4} - |F_2| \cdot \left(\frac{\mathrm{c}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{c}}{2}\right) - F_3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\mathrm{c}}{2} - F_4 \cdot \left(\frac{\mathrm{c}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{c}}{2}\right)$$

$$M_0 = -|F_1| \cdot \frac{\mathrm{c}}{4} - |F_2| \cdot \frac{2}{3} \cdot \mathrm{c} - F_3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \mathrm{c} - F_4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \mathrm{c}$$

$$M_0 = -490{,}5 \cdot \frac{1}{4} - 245{,}25 \cdot \frac{2}{3} - 122{,}25 \cdot \frac{1}{3} - 122{,}25 \cdot \frac{2}{3} = -408{,}75 \text{ Nm}$$

4.2 **Raspored tlaka na gornjaci i donjaci aeroprofila pri nultom napadnom kutu, standardnim uvjetima na razini mora i brzini strujanja od 180 km/h dan je na slici. Relativni tlakovi iznose Δp_g = –500 Pa i Δp_d = 100 Pa. Duljina tetive je 1 m. Odredi:**

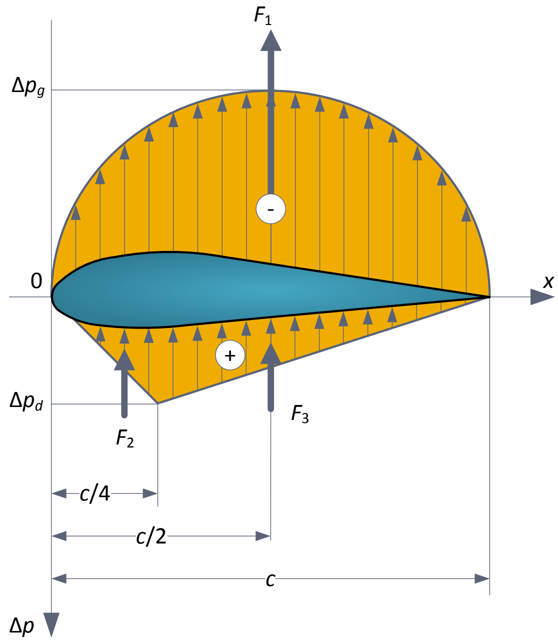
a) silu uzgona po jedinici raspona krila,

b) koeficijent uzgona,

c) moment oko napadnog brida,

d) koeficijent momenta oko napadnog brida,

e) centar potiska.



Rješenje:

$$V = 180 \text{ km/h} = 180/3{,}6 = 50 \text{ m/s}$$

$$\Delta p_g = -500 \text{ Pa}$$

$$\Delta p_d = 100 \text{ Pa}$$

$$c = 1 \text{ m}$$

$$H = 0 \text{ m} \quad \rightarrow \quad p = 101\,325 \text{ Pa}$$

$$\rho = 1{,}225 \text{ kg/m}^3$$

Srednji tlak na gornjaci zatvara jednaku površinu iznad tetive kao i dana polukružna raspodjela, polumjer kružnice odgovara tlaku Δp_g i polovini duljine tetive c/2: $r \equiv \Delta p_g \equiv c/2$

a) sila uzgona na aeroprofil

$$\Delta \bar{p}_g \cdot c = \frac{1}{2} r^2 \pi \equiv \frac{1}{2} \Delta p_g \frac{c}{2} \pi \quad \Longrightarrow \quad \Delta \bar{p}_g = \frac{1}{4} \Delta p_g \pi = \frac{1}{4} \cdot (-500) \cdot \pi = -392{,}7 \text{ Pa}$$

$$\Delta \bar{p}_1 = \Delta p_g = -392{,}7 \text{ Pa}; \quad \Delta \bar{p}_2 = \Delta \bar{p}_3 = \frac{\Delta p_d}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Pa}$$

$$F_1 = \Delta \bar{p}_1 \cdot c \cdot 1 = -392{,}7 \cdot 1 = -392{,}75 \text{ N}$$

$$F_2 = \Delta \bar{p}_2 \cdot \frac{c}{4} \cdot 1 = 50 \cdot \frac{1}{4} = 12{,}5 \text{ N}$$

$$F_3 = \Delta \bar{p}_3 \cdot \frac{3c}{4} \cdot 1 = 50 \cdot \frac{3}{4} = 37{,}5 \text{ N}$$

$$F_z = |F_1| + F_2 + F_3 = 392{,}7 + 12{,}5 + 37{,}5 = 442{,}7 \text{ N}$$

b) $F_z = C_z \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot A = C_z \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot c \cdot 1 \quad \rightarrow \quad C_z = \frac{2F_z}{\rho V^2 c} = \frac{2 \cdot 442{,}7}{1{,}225 \cdot 50^2 \cdot 1} = 0{,}289$

c) $M_0 = -|F_1| \cdot \mathrm{x}_1 - |F_2| \cdot \mathrm{x}_2 - F_3 \cdot \mathrm{x}_3 = -|F_1| \cdot \frac{\mathrm{c}}{2} - |F_2| \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\mathrm{c}}{4} - F_3 \cdot \left(\frac{\mathrm{c}}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot \mathrm{c}}{4}\right)$

$$M_0 = -392{,}7 \cdot \frac{1}{2} - 12{,}5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - 37{,}5 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4}\right) = -217{,}2 \ \text{Nm}$$

d) $M_0 = C_{m0} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot A \cdot c = C_{m0} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot c \cdot 1 \cdot c \quad \rightarrow \quad C_{m0} = \frac{2M_0}{\rho V^2 c^2} = \frac{2 \cdot (-217{,}2)}{1{,}225 \cdot 50^2 \cdot 1^2} = -0{,}142$

e) $M_0 = -F_z \cdot x_{CP} \quad \Longrightarrow \quad x_{CP} = \frac{-M_0}{F_z} = \frac{217{,}2}{442{,}7} = 0{,}491 \ \text{m}$

4.3

Dani su dijagrami aerodinamičkih karakteristika za aeroprofil NACA 65$_2$-415 (str. 49) koji se ispituje u uvjetima standardne atmosfere na razini mora i brzini 150 m/s. Odredi:

- **a) napadni kut nultog uzgona,**
- **b) sile uzgona i otpora pri napadnom kutu 6˚,**
- **c) kritični napadni kut i odgovarajuće brzine pri Reynoldsovima brojevima , i**
- **d) ovisnost pozicije centra potiska u odnosu na napadni kut za napadne kutove od -4 do +8, prikazati tablično i grafički.**

Rješenje:

a) $\alpha_{z0} = -2{,}5\,° \ \rightarrow$ očitano iz dijagrama

b) $\alpha = 6\,° \ \Longrightarrow \ c_z = 0{,}9 \ \Longrightarrow \ c_x = 0{,}0088 \ \rightarrow$ očitano iz dijagrama

ISA /SL $\rightarrow \mu = 1{,}7894 \cdot 10^{-5}$ Pas

$$Re = \frac{\rho V c}{\mu} = \frac{1{,}225 \cdot 150 \cdot 1}{1{,}7894 \cdot 10^{-5}} = 10{,}269 \cdot 10^6$$

$$F_z = c_z \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot c \cdot 1 = 0{,}9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot 150^2 \cdot 1 = 12\,403 \ \text{N}$$

$$F_x = c_x \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot c \cdot 1 = 0{,}0088 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot 150^2 \cdot 1 = 121{,}3 \ \text{N}$$

c) $V = \dfrac{\mu \cdot Re}{\rho \cdot c} = \dfrac{1{,}7894 \cdot 10^{-5} \cdot Re}{1{,}225 \cdot 1} = 1{,}4607 \cdot 10^{-5} Re$

Re	V [m/s]	α_{kr} [°]
$3{\cdot}10^6$	43,82	16
$6{\cdot}10^6$	87,64	17,5
$9{\cdot}10^6$	131,47	17

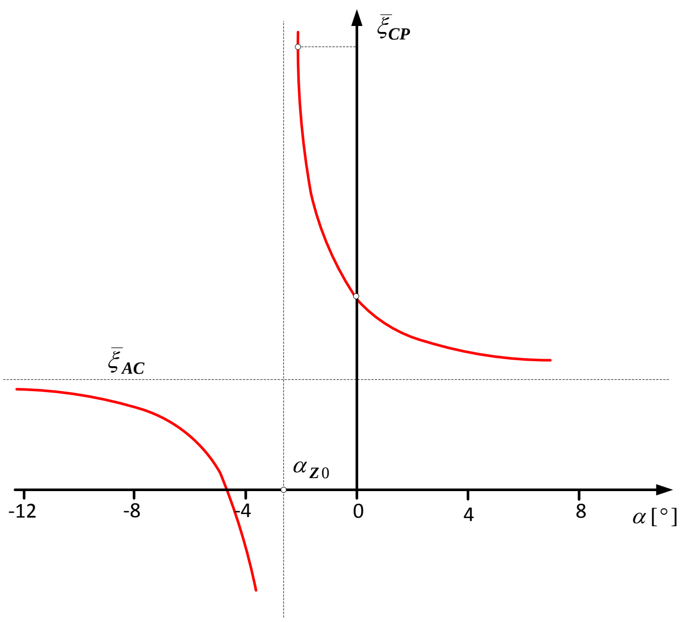
d) $c_{M_{CP}} = c_{M_{AC}} + c_z(\bar{\xi}_{CP} - \bar{\xi}_{AC})$

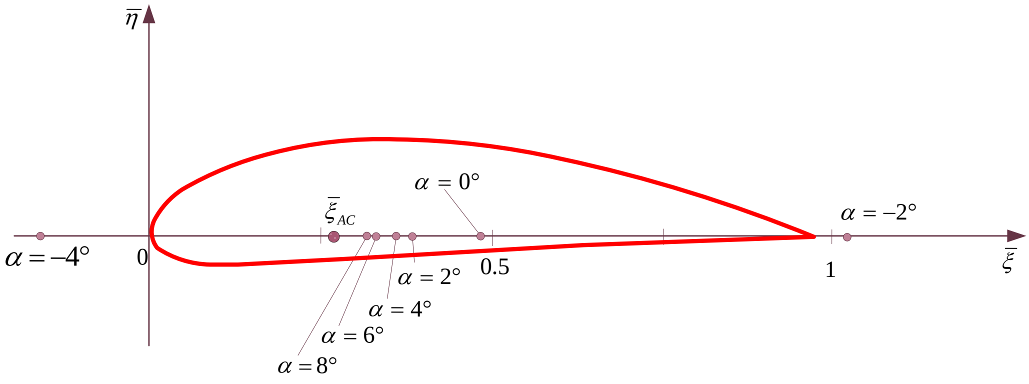
$$c_{M_{CP}} = 0 \;\rightarrow\; c_{M_{AC}} + c_z(\bar{\xi}_{CP} - \bar{\xi}_{AC}) = 0 \;\Rightarrow\; \bar{\xi}_{CP} = \bar{\xi}_{AC} - \frac{c_{M_{AC}}}{c_z}$$

$\bar{\xi}_{AC} = 0{,}268 \;\Longrightarrow\;$ iz dijagrama

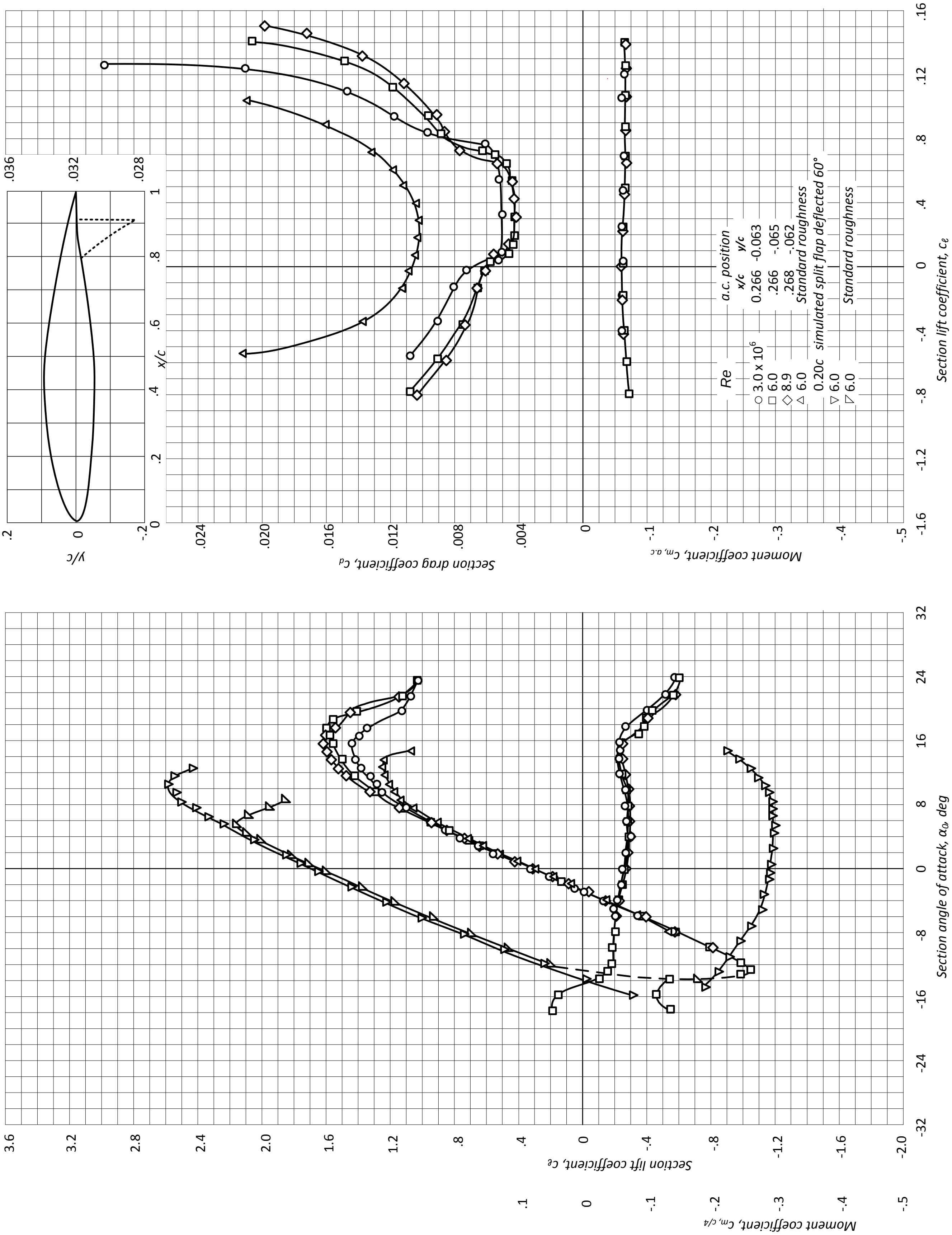
Promjena položaja CP s obzirom na napadni kut

α [°]	c_z	$c_{M_{AC}}$	$\bar{\xi}_{CP}$
-4	-0,14	-0,06	-0,161
-2	0,08	-0,06	1,018
0	0,28	-0,06	0,482
2	0,52	-0,06	0,383
4	0,72	-0,06	0,351
6	0,9	-0,06	0,335
8	1,1	-0,06	0,323





NACA 65_2-415


Section lift coefficient, c_ℓ
Section drag coefficient, c_d
Moment coefficient, $c_{m,a.c.}$
x/c
y/c
a.c. position
Re
x/c y/c
○ 3.0 x 10^6 0.266 -0.063
□ 6.0 .266 -.065
◇ 8.9 .268 -.062
△ 6.0 Standard roughness
0.20c simulated split flap deflected 60°
▽ 6.0
◸ 6.0 Standard roughness
Section angle of attack, α_0, deg
Section lift coefficient, c_ℓ
Moment coefficient, $c_{m,c/4}$

4.4 **Promatra se let krila beskonačnog raspona izrađenog od aeroprofila NACA 2415 (str. 52) s tetivom duljine *c* = 1060 mm na visini *H* = 10 000 m u uvjetima standardne atmosfere brzinom *V* = 100 m/s. Odredi:**

- **a) sile uzgona i otpora po jedinici raspona krila kod nultog napadnog kuta,**
- **b) srednju razliku tlaka na krilu u uvjetima pod a)**
- **c) kut nultog uzgona,**
- **d) kritični napadni kut kod brzine 100 m/s,**
- **e) koliko kritični napadni kut ovisi o brzini.**

Rješenje:

$H = 10\,000\ \text{m}$

$T = T_n - \Delta\beta \cdot H = 288{,}15 - 6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 10000 = 223{,}15\ \text{K}$

$\rho = \rho_n \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{4{,}256} = 1{,}225 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 10000)^{4{,}256} = 0{,}4126\ \text{kg/m}^3$

$p = \rho \cdot R \cdot T = 0{,}4126 \cdot 287{,}053 \cdot 223{,}15 = 26\,429{,}5\ \ \text{Pa}$

$\mu = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0{,}76} = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot 223{,}15^{0{,}76} = 1{,}473 \cdot 10^{-5}\ \text{Pas}$

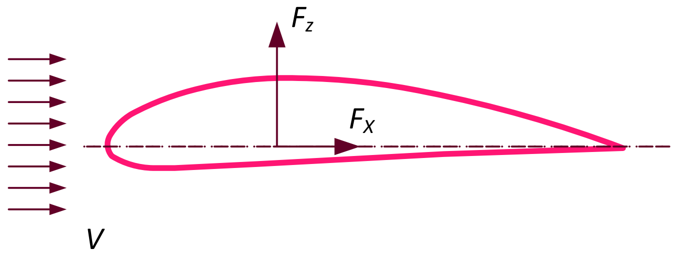
$$Re = \frac{\rho V c}{\mu} = \frac{0{,}4126 \cdot 100 \cdot 1{,}06}{1{,}473 \cdot 10^{-5}} = 3 \cdot 10^6$$

a) $\alpha = 0\,° \implies c_z = 0{,}2 \implies c_x = 0{,}0065 \ \rightarrow$ očitano iz dijagrama

$$F_z = c_z \frac{1}{2} \rho V^2 S = 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}4126 \cdot 100^2 \cdot 1{,}06 \cdot 1 = 437{,}4\ \ \text{N/m}$$

$$F_x = c_x \frac{1}{2} \rho V^2 S = 0{,}0065 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}4126 \cdot 100^2 \cdot 1{,}06 \cdot 1 = 14{,}2\ \ \text{N/m}$$

b) $p_d - p_g = \dfrac{F_z}{S} = \dfrac{F_z}{b \cdot c} = \dfrac{437{,}4}{1{,}06} = 412{,}6\ \ \text{Pa}$



c) Iz dijagrama aeroprofila za $c_z = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \alpha_{z0} = -2\,°$

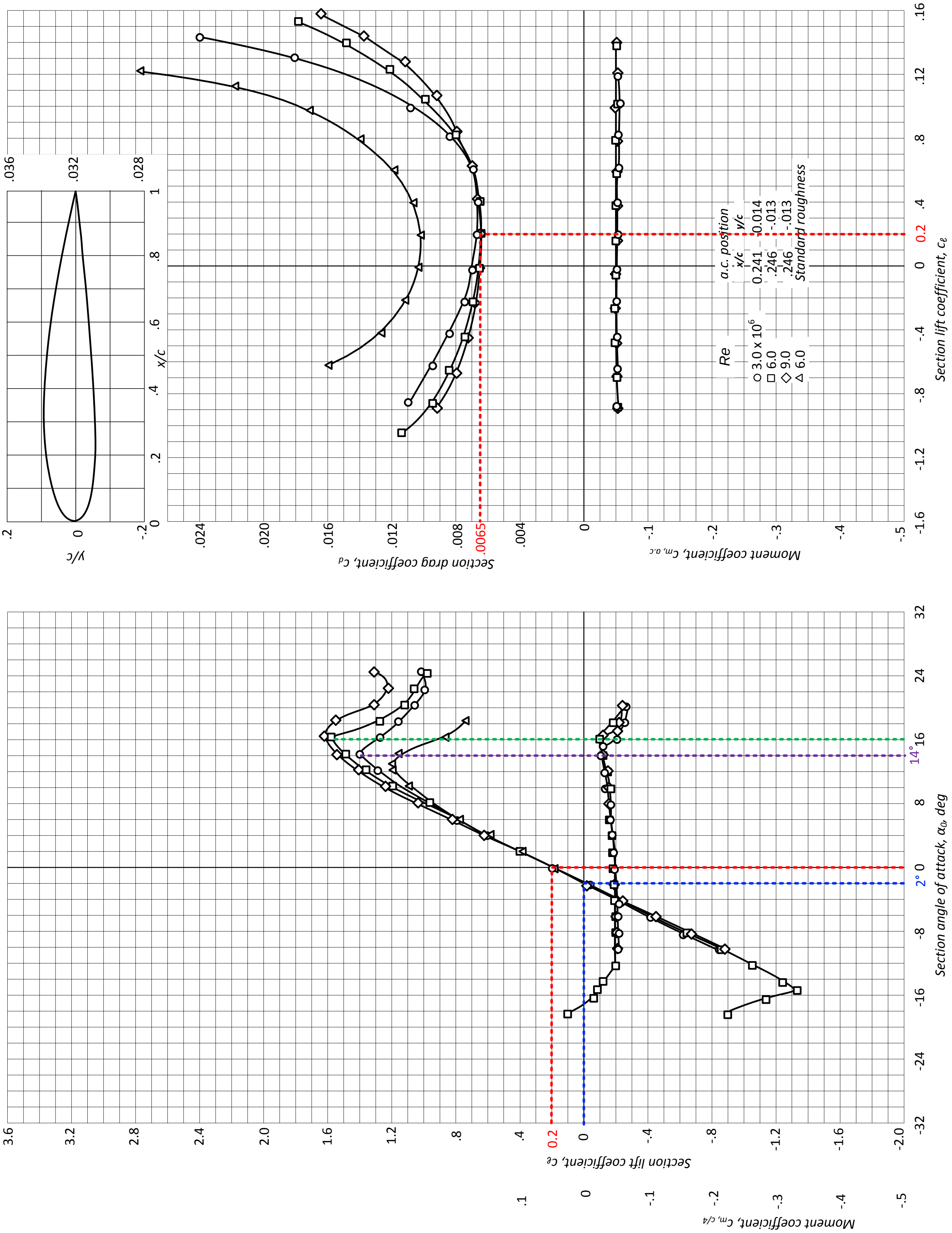
d) Iz dijagrama za $c_{z_{max}} \;\Rightarrow\; \alpha_{kr} = 14\,°$

e) $Re = 3 \cdot 10^6 \;\Longrightarrow V = 100\ \mathrm{m/s} \;\Longrightarrow\; \alpha_{kr} = 14\,°$

$$Re = 6 \cdot 10^6 \;\Longrightarrow V = \frac{Re \cdot \mu}{\rho \cdot c} = \frac{6 \cdot 10^6 \cdot 1{,}473 \cdot 10^{-5}}{0.4126 \cdot 1{,}06} = 200\ \mathrm{m/s} \quad \Longrightarrow \alpha_{kr} = 16\,°$$

$$Re = 9 \cdot 10^6 \;\Longrightarrow V = \frac{Re \cdot \mu}{\rho \cdot c} = \frac{9 \cdot 10^6 \cdot 1{,}473 \cdot 10^{-5}}{0.4126 \cdot 1{,}06} = 300\ \mathrm{m/s} \quad \Longrightarrow \alpha_{kr} = 16\,°$$

NACA 2415



Section lift coefficient, c_ℓ
Section drag coefficient, c_d
Moment coefficient, $c_{m,a.c.}$
Moment coefficient, $c_{m,c/4}$
Section angle of attack, α_0, deg
x/c
y/c
a.c. position
Re
○ 3.0 x 10^6
□ 6.0
◇ 9.0
△ 6.0 Standard roughness
0.241 -0.014
.246 -.013
.246 -.013
.0065
0.2
2°
14°

4.5

Na aeroprofil NACA 2418 (str. 54) nastrujava zrak gustoće ρ = 0,818 kg/m^3 i dinamičke viskoznosti μ = 15,680·10^{-6} Pas, brzinom V = 65 m/s. Duljina tetive aeroprofila je 1,4 m. Odredi:

a) maksimalnu finesu i

b) aerodinamičku silu (intenzitet, smjer i pravac djelovanja) pri napadnom kutu α = 10°.

Rješenje:

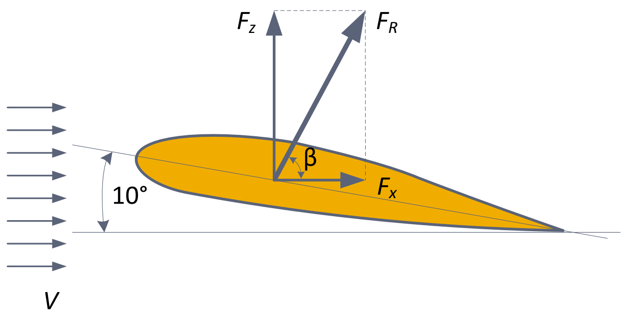
a)

α [°]	c_z	c_x	c_z/c_x
0	0,23	0,0069	33,33
2	0,41	0,0071	57,75
4	0,62	0,0078	79,49
6	0,8	0,0087	91,95
8	1	0,0098	102,04
10	**1,2**	**0,0112**	**107,14**
12	1,36	0,0145	93,79
14	1,48	0,0172	86,05

$$Re = \frac{\rho V c}{\mu} = \frac{0{,}818 \cdot 65 \cdot 1{,}4}{15{,}68 \cdot 10^{-6}} = 4{,}75 \cdot 10^6$$

$$f_{max} = \left(\frac{c_z}{c_x}\right)_{max} = 107{,}14 \quad \text{pri} \quad \alpha = 10°$$

b) $\alpha = 10\,° \implies c_z = 1{,}2 \implies c_x = 0{,}0112$ → očitano iz dijagrama



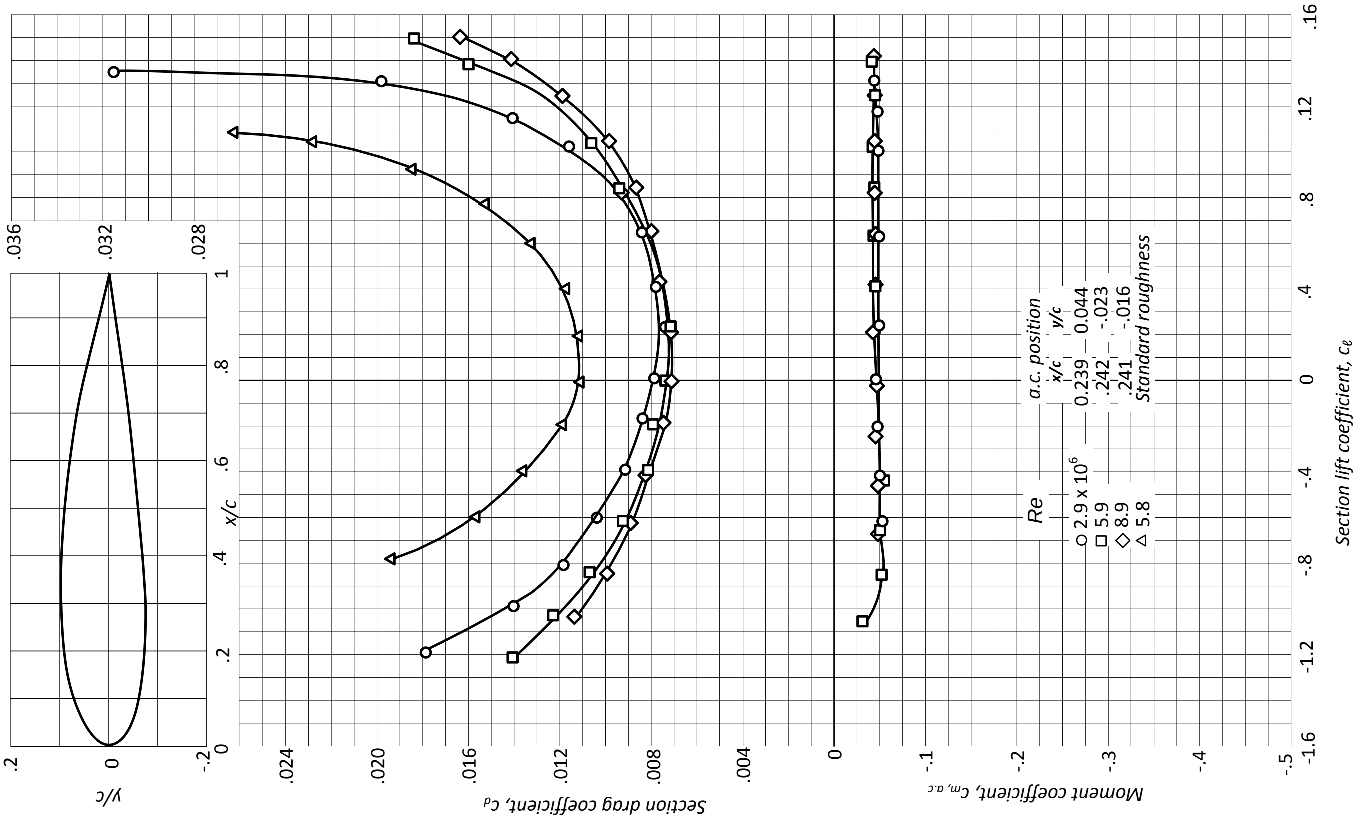
$$F_z = c_z \frac{1}{2} \rho V^2 S = 1{,}2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}818 \cdot 65^2 \cdot 1{,}4 \cdot 1 = 2903{,}1 \ \text{N/m}$$

$$F_x = c_x \frac{1}{2} \rho V^2 S = 0{,}0112 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}818 \cdot 65^2 \cdot 1{,}4 \cdot 1 = 27{,}1 \ \text{N/m}$$

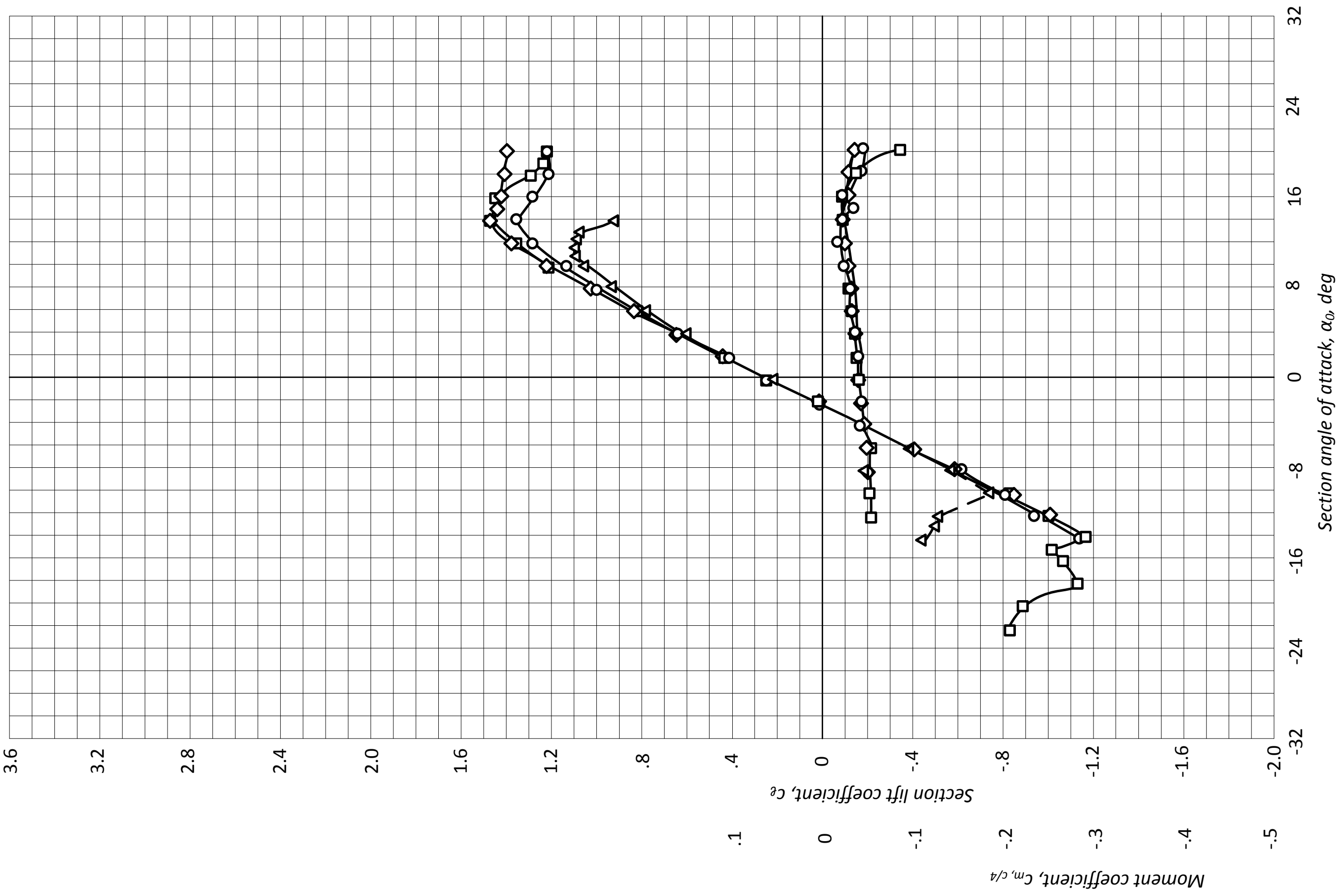
$$F_R = \sqrt{F_z{}^2 + F_x{}^2} = \sqrt{2903{,}1^2 + 27{,}1^2} = 2903{,}2 \ \text{N/m}$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tan} \frac{F_z}{F_x} = \operatorname{arc\,tan} \frac{c_z}{c_x} = \operatorname{arc\,tan} \frac{1{,}2}{0{,}0112} = 89{,}5\,°$$

NACA 2418



Section lift coefficient, c_ℓ
Section drag coefficient, c_d
Moment coefficient, $c_{m,a.c.}$
y/c
x/c
Re
○ 2.9 x 10^6
□ 5.9
◇ 8.9
△ 5.8
a.c. position
x/c y/c
0.239 0.044
.242 -.023
.241 -.016
Standard roughness



Section angle of attack, α_0, deg
Section lift coefficient, c_ℓ
Moment coefficient, $c_{m,c/4}$

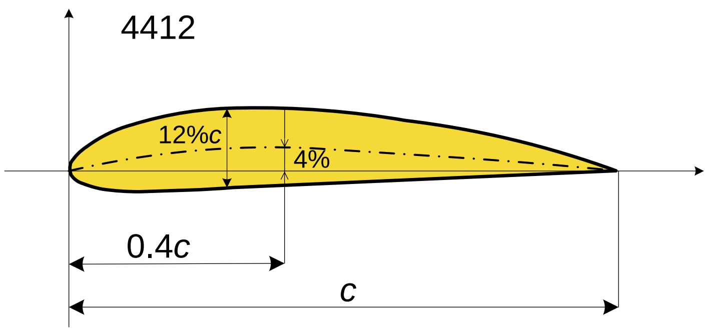
4.6

Za aeroprofil NACA 4412 čiji su podaci zadani tablično (Tablica 4-1. i Tablica 4-2.) , odredi:

- **a) značenje oznake**
- **b) sile uzgona i otpora pri napadnom kutu α = 6°, brzini V = 40 m/s i standardnim uvjetima na razini mora, ako je duljina tetive 2 m,**
- **c) maksimalnu finesu aeroprofila,**
- **d) položaj centra potiska $\bar{x}_{CP}$ pri α = 8° ako je $\bar{x}_{AC}$ = 0,246,**
- **e) koeficijent momenta propinjanja u točki $\bar{x}_P$ = 0,250 pri α = 8°,**

Rješenje:

a)



4 - najveća zakrivljenost srednje linije aeroprofila [%]

4 - mjesto najveće zakrivljenosti srednje linije aeroprofila u desetim dijelovima tetive c

12 - maksimalna debljina profila u % tetive

b) $\alpha = 6\,° \implies c_z = 1 \implies c_x = 0{,}014$ → očitano iz dijagrama

$$F_z = c_z \frac{1}{2}\rho V^2 S = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot 40^2 \cdot 2 \cdot 1 = 1960 \ \ \mathrm{N/m}$$

$$F_x = c_x \frac{1}{2}\rho V^2 S = 0{,}014 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot 40^2 \cdot 2 \cdot 1 = 27{,}44 \ \ \mathrm{N/m}$$

c)

α [°]	c_z	c_x	c_z/c_x
0	0,38	0,01	38
2	0,6	0,01	60
4	0,8	0,012	66,7
6	1	0,014	71,4
8	1,15	0,017	67,6
10	1,27	0,022	57,7

$$\frac{F_z}{F_x} = 71{,}4$$

$$f_{max} = \left(\frac{c_z}{c_x}\right)_{max} = 71{,}4 \quad \text{pri} \quad \alpha = 6°$$

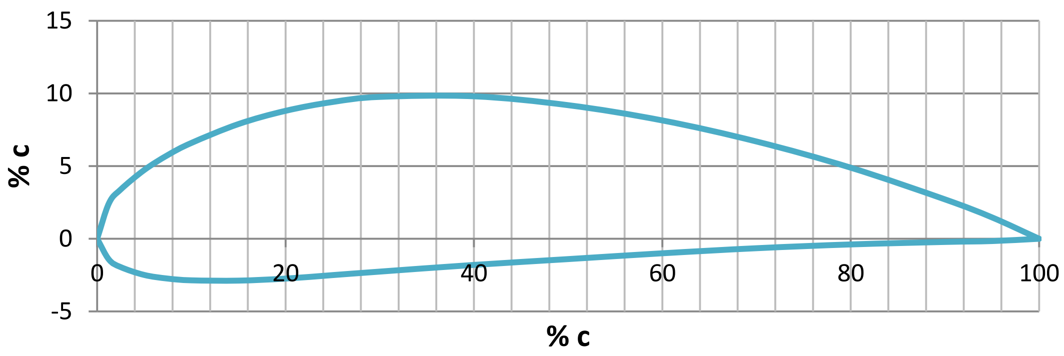
d) $(\bar{x}_{CP} - \bar{x}_{AC})c_z = -c_{M_{AC}}$ $\qquad \alpha = 8° \implies c_{M_{AC}} = -0{,}1\,, c_z = 1{,}15$

$$\bar{x}_{CP} = \frac{-c_{M_{AC}}}{c_z} + \bar{x}_{AC} \qquad \bar{x}_{CP} = \frac{0{,}1}{1{,}15} + 0{,}246 \ = \ 0{,}333$$

e) $c_{M_P} = c_{M_{AC}} + c_z \cdot (\bar{x}_P - \bar{x}_{AC}) = -0{,}1 + 1{,}15 \cdot (0{,}25 - 0{,}246) = -0{,}0954$

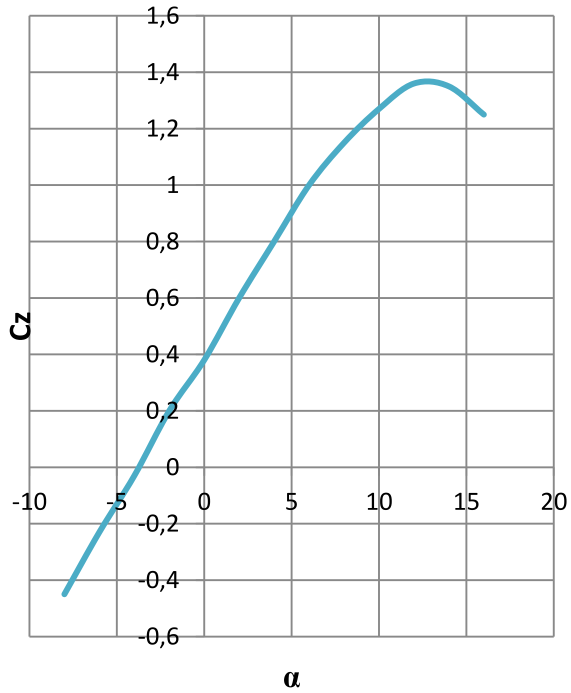
Tablica 4-1. **AEROPROFIL NACA 4412 – Geometrijske karakteristike**

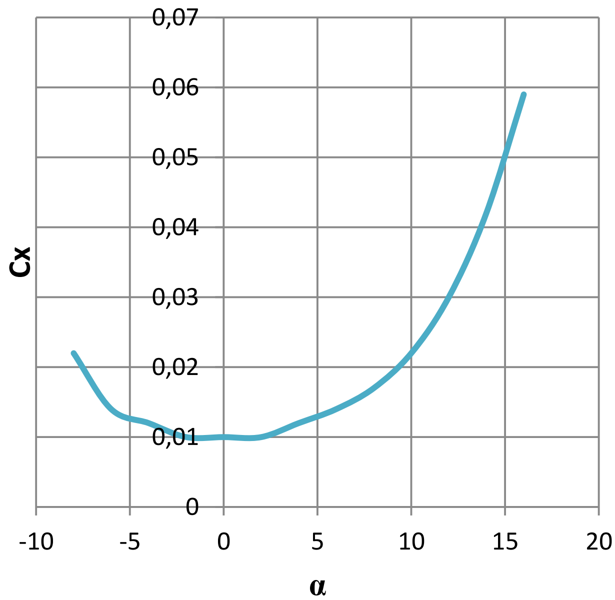
Udaljenost od napadnog ruba [% c]	Gornjaka [% c]	Donjaka [% c]
0	0	0
1,25	2,44	-1,43
2,5	3,39	-1,95
5	4,73	-2,49
7,5	5,76	-2,74
10	6,59	-2,86
15	7,89	-2,88
20	8,8	-2,74
25	9,41	-2,5
30	9,76	-2,26
40	9,8	-1,8
50	9,19	-1,4
60	8,14	-1
70	6,69	-0,65
80	4,89	-0,39
90	2,71	-0,22
95	1,47	-0,16
100	0	0



Tablica 4-2. **AEROPROFIL NACA 4412 – Aerodinamičke karakteristike**

Napadni kut	Koeficijent uzgona	Koeficijent otpora	Koeficijent momenta
α [°]	C_z	C_x	C_{Mac}
-8	-0,45	0,022	-0,097
-6	-0,23	0,014	-0,092
-4	-0,03	0,012	-0,092
-2	0,2	0,01	-0,092
0	0,38	0,01	-0,093
2	0,6	0,01	-0,095
4	0,8	0,012	-0,098
6	1	0,014	-0,1
8	1,15	0,017	-0,1
10	1,27	0,022	-0,095
12	1,36	0,03	-0,092
14	1,35	0,042	-0,092
16	1,25	0,059	-0,095





4.7 **Za aeroprofil NACA 63₂ – 215 odredi i grafički prikaži ovisnost pozicije centra potiska o napadnom kutu, ako se napadni kut mijenja od -10 do +16 ° s korakom od 2°, pri *Re* = 3 × 10⁶ u Matlab-u.**

Rješenje:

Iz dijagrama aeroprofila NACA 63_2 – 215 (Abbot 1959) očitane su vrijednosti:

$$\bar{x}_{AC} = 0{,}269$$

$$c_{M_{AC}} = -0{,}033$$

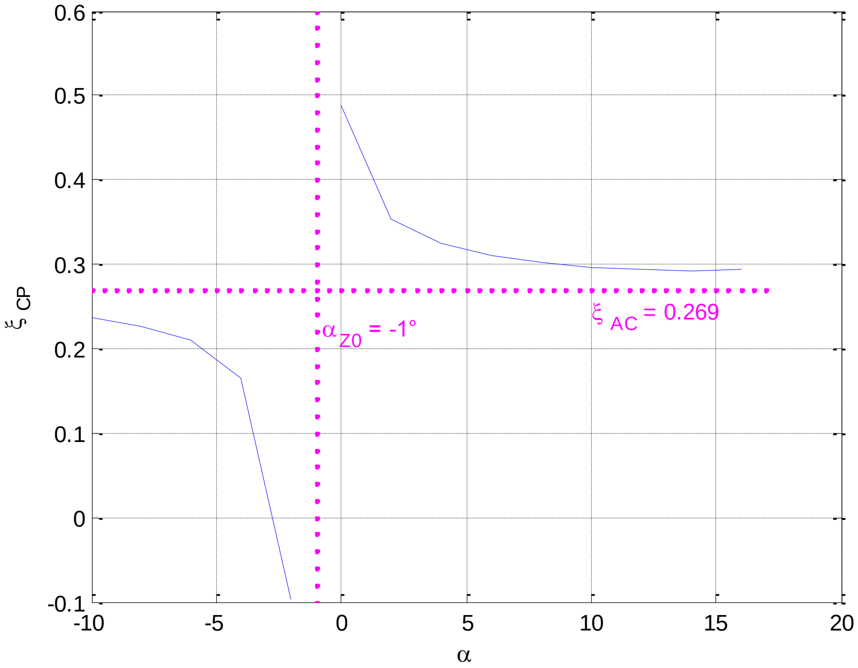
α [°]	**-10**	**-8**	**-6**	**-4**	**-2**	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**
c_z	-1	-0,76	-0,56	-0,32	-0,09	0,15	0,39	0,6	0,8	1	1,2	1,34	1,42	1,37

Položaj centra potiska određuje se pomoću jednadžbe u kojoj je zanemaren otpor aeroprofila:

$$\bar{x}_{CP} = \frac{-c_{M_{AC}}}{c_z} + \bar{x}_{AC}$$

```
%% Promjena položaja centra potiska aeroprofila NACA 63₂-215

xAC=0.269;

cMAC=-0.033;% približno konstantno za sve napadne kutove

alpha=[-10:2:16]';

cz=[-1;-0.76;-0.56;-0.32;-0.09;0.15;0.39;0.6;0.8;1;1.2;1.34;1.42;1.37];

xCP=xAC-cMAC./cz;

%  Crtanje  krivulje  položaja  centra  potiska  u  ovisnosti  o  napadnom
% kutu i asimptota

% Jednostavnija verzija samo krivulje bila bi jednostavno
% plot(alpha,ksiCP)

plot(alpha(1:5),xCP(alpha<-1),'b',alpha(6:length(alpha)),...

    xCP(alpha>-1),'b',-10:0.5:17,xAC,':m',-1,-0.1:0.02:0.6,':m');
```

```
xlabel('\alpha')

ylabel('\xi _C_P')

text(10,0.24,'\xi _A_C = 0.269','Color','m')

text(-0.8,0.22,'\alpha_Z_0 = -1°','Color','m')

grid on
```



5 DIMENZIJSKA ANALIZA

Dimenzijska analiza je metoda koja omogućava da se naznači funkcionalna međuovisnost neke aerodinamičke karakteristike i drugih utjecajnih veličina u bezdimenzionalnom obliku. Konkretan oblik funkcijske ovisnosti, međutim, mora se odrediti na drugi način, npr. eksperimentom.

Intenzitet veličine stanja mjeri se odgovarajućom jedinicom. Za osnovne jedinice mase, dužine vremena i temperature koriste se: M, L, T i K.

Temelj dimenzijske analize je Buckinghamov Π teorem koji pojednostavljeno kaže:

"Problem koji promatramo može se opisati sa n relevantnih veličina Q_i. U općem slučaju između tih veličina postoji funkcijska veza oblika $F(Q_1, Q_2, ..., Q_n) = 0$. Ako postoji takva funkcijska veza može se naći k = n-r bezdimenzionalnih značajki Π_i, gdje je r jednak rangu[3] dimenzionalne matrice."

Problem se rješava u nekoliko koraka:

1. Postavljanje osnovne međuovisnosti
2. Formiranje dimenzionalne matrice
3. Određivanje ranga dimenzionalne matrice
4. Određivanje bezdimenzionalnih značajki

Kroz zadatke 5.1 i 5.2 odredit će se funkcionalne ovisnosti sile uzgona i snage propelera o ostalim relevantnim bezdimenzionalnim značajkama kao što su napadni kut α, Reynoldsov (Re), Machov broj (Ma), koeficijent snage C_p i slično.

[3] Rang matrice jednak je redu najveće determinante različite od nule.

5.1 **Aeroprofil duljine tetive ℓ nalazi se u struji zraka pod napadnim kutom α koji se mijenja u nekom rasponu. Odrediti funkcionalnu ovisnost sile uzgona na aeroprofil i ostalih relevantnih bezdimenzionalnih karakteristika.**

Rješenje:

1.korak : Postavljanje osnovne međuovisnosti

$$F_z = f(V, \ell, \rho, \mu, E, \alpha)$$

$n = 7$ ... broj utjecajnih veličina

2.korak : Formiranje dimenzionalne matrice

$$\mu \ \left[\mathrm{Pa\ s} = \frac{\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}}{\mathrm{m^2}}\mathrm{s} = \mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-1}}\right]$$

$$E \ \left[\frac{N}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-2}}\right] \quad \text{... modul elastičnosti}$$

Dimenzija	*Veličina*						
	F	***V***	***ℓ***	***ρ***	***μ***	***E***	***α***
M	1	0	0	1	1	1	0
L	1	1	1	-3	-1	-1	0
T	-2	-1	0	0	-1	-2	0

3. korak: Određivanje ranga dimenzionalne matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & \ell & \rho \end{array} \\ \mathbf{B} = & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \cdot (0+1) = 1 \quad \neq 0 \qquad \surd$$

$k = n - r = 7 - 3 = 4$ $\quad r \rightarrow$ rang bezdimenzionalne matrice

$k \rightarrow$ mogu se formirati 4 bezdimenzionalna parametra

4. korak: Određivanje bezdimenzionalnih značajki

$\Pi_1 = \alpha$

$\Pi_2 = F\, v^{a_1}\, \ell^{a_2}\, \rho^{a_3}$

$M^\circ L^\circ T^\circ = M^1 L^1 T^{-2} \cdot (L^1 T^{-1})^{a_1} \cdot (L^1)^{a_2} \cdot (M^1 L^{-3})^{a_3}$

$M^\circ L^\circ T^\circ = M^{1+a_3} \cdot L^{1+a_1+a_2-3a_3} \cdot T^{-2-a_1}$

$$\left.\begin{aligned} &M:\ 1 + a_3 = 0 && \Longrightarrow\ a_3 = -1 \\ &T:\ -2 - a_1 = 0 && \Longrightarrow\ a_1 = -2 \\ &L:\ 1 + a_1 + a_2 - 3a_3 = 0 && \Longrightarrow\ a_2 = -2 \end{aligned}\right\} \quad \Pi_2 = \frac{F}{\rho\, v^2\, \ell^2}$$

$\Pi_3 = \mu\, v^{b_1}\, \ell^{b_2}\, \rho^{b_3}$

$M^\circ L^\circ T^\circ = M^1 L^{-1} T^{-1} \cdot (L^1 T^{-1})^{b_1} \cdot (L^1)^{b_2} \cdot (M^1 L^{-3})^{b_3}$

$M^\circ L^\circ T^\circ = M^{1+b_3} \cdot L^{-1+b_1+b_2-3b_3} \cdot T^{-1-b_1}$

$$\left.\begin{aligned} &M:\ 1 + b_3 = 0 && \Longrightarrow\ b_3 = -1 \\ &T:\ -1 - b_1 = 0 && \Longrightarrow\ b_1 = -1 \\ &L:\ -1 + b_1 + b_2 - 3b_3 = 0 && \Longrightarrow\ b_2 = -1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \Pi_3 &= \frac{\mu}{\rho\, v\, \ell} \\ \Pi_3 &= \frac{1}{\mathcal{Re}} \end{aligned}$$

$\Pi_4 = E\, v^{c_1}\, \ell^{c_2}\, \rho^{c_3}$

$M^\circ L^\circ T^\circ = M^1 L^{-1} T^{-2} \cdot (L^1 T^{-1})^{c_1} \cdot (L^1)^{c_2} \cdot (M^1 L^{-3})^{c_3}$

$M^\circ L^\circ T^\circ = M^{1+c_3} \cdot L^{-1+c_1+c_2-3c_3} \cdot T^{-2-c_1}$

$$\left.\begin{aligned} &M:\ 1 + c_3 = 0 && \Longrightarrow\ c_3 = -1 \\ &T:\ -2 - c_1 = 0 && \Longrightarrow\ c_1 = -2 \\ &L:\ -1 + c_1 + c_2 - 3c_3 = 0 && \Longrightarrow\ c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Pi_4 = \frac{E}{\rho\, v^2}$$

Za izentropski proces iz jedandžbe stanja:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = C_1 = \text{konst.} \quad /^{\ln} \ \rightarrow\ \ln\frac{p}{\rho^\kappa} = \ln C_1 \ \rightarrow\ \ln p - \ln \rho^\kappa = \ln C_1 \quad /^{\mathrm{d}} \ \rightarrow\ \frac{dp}{p} - \kappa\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

$$\frac{dp}{p} = \kappa\frac{d\rho}{\rho} \ \rightarrow\ \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}} = \kappa p$$

$$\frac{dp}{d\rho/\rho} = E = \kappa p$$

$$a = \sqrt{\kappa\, R\, T} \quad \& \quad p = \rho RT \implies RT = \frac{p}{\rho} \quad \rightarrow a = \sqrt{\kappa\,\frac{p}{\rho}} \quad \rightarrow a^2\rho = \kappa p$$

$$\Pi_4 = \frac{\kappa p}{\rho\, v^{\,2}} = \frac{a^2}{v^2} \implies \Pi_4 = \frac{1}{Ma}$$

$$\Phi\left(\frac{F}{\rho\, V^2\, \ell^2}, \mathcal{R}e, Ma, \alpha\right) = 0$$

$$\frac{F}{\rho\, V^2\, \ell^2} = \Phi_1(\mathcal{R}e, Ma, \alpha)$$

5.2 **Metodom dimenzionalne analize odredi bezdimenzionalne parametre o kojima ovisi snaga propelera, ako se u obzir trebaju uzeti slijedeće veličine:**

- **snaga propelera *P***
- **broj okretaja propelera *n***
- **gustoća zraka *ρ***
- **viskoznost zraka *μ***
- **promjer propelera *D***
- **brzina zrakoplova *V***

Rješenje:

1. korak: Postavljanje osnovne međuovisnosti

$f(P, n, \rho, \mu, D, V) = 0$

$n = 6$

2. korak: Formiranje dimenzionalne matrice

	P	*n*	*ρ*	*μ*	*D*	*V*
M	1	0	1	1	0	0
L	2	0	-3	-1	1	1
T	-3	-1	0	-1	0	-1

3. korak: Određivanje ranga dimenzionalne matrice

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{B} = \end{array} \begin{array}{ccc} n & \rho & D \\ \end{array}$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0+1) = -1 \quad \neq 0 \quad \surd$$

$k = n - r = 6 - 3 = 3$ $\qquad r \rightarrow$ rang bezdimenzionalne matrice

$k \rightarrow$ mogu se formirati 3 bezdimenzionalna parametra

4. korak: Određivanje bezdimenzionalnih značajki

$\Pi_1 = P\, n^{a_1}\, \rho^{a_2}\, D^{a_3}$

$M°L°T° = ML^2T^{-3} \cdot (T^{-1})^{a_1} \cdot (ML^{-3})^{a_2} \cdot L^{a_3}$

$M°L°T° = M^{1+a_2} \cdot L^{2-3a_2+a_3} \cdot T^{-3-a_1}$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{M:} \; 1 + a_2 = 0 & \Rightarrow & a_2 = -1 \\ \text{T:} \; -3 - a_1 = 0 & \Rightarrow & a_1 = -3 \\ \text{L:} \; 2 - 3a_2 + a_3 = 0 & \Rightarrow & a_3 = -5 \end{array}\right\} \quad \Pi_1 = \frac{P}{\rho\, n^3\, D^5} = C_p$$

$\Pi_2 = \mu\, n^{b_1}\, \rho^{b_2}\, D^{b_3}$

$M°L°T° = ML^{-1}T^{-1} \cdot (T^{-1})^{b_1} \cdot (ML^{-3})^{b_2} \cdot L^{b_3}$

$M°L°T° = M^{1+b_2} \cdot L^{-1-3b_2+b_3} \cdot T^{-1-b_1}$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{M:} \; 1 + b_2 = 0 & \Rightarrow & b_2 = -1 \\ \text{T:} \; -1 - b_1 = 0 & \Rightarrow & b_1 = -1 \\ \text{L:} \; -1 - 3b_2 + b_3 = 0 & \Rightarrow & b_3 = -2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \Pi_2 = \dfrac{\mu}{\rho\, n\, D^2} = \dfrac{\mu}{\rho\, n\, 4R^2} \\ \Pi_2 = \dfrac{\mu}{4\rho \cdot 2\pi\omega R \cdot R} = \dfrac{\mu}{8\pi\rho V R} = \dfrac{1}{8\pi} \cdot \dfrac{1}{Re} \end{array}$$

$\Pi_3 = V\, n^{c_1}\, \rho^{c_2}\, D^{c_3}$

$M°L°T° = LT^{-1} \cdot (T^{-1})^{c_1} \cdot (ML^{-3})^{c_2} \cdot L^{c_3}$

$M°L°T° = M^{c_2} \cdot L^{1-c_2+c_3} \cdot T^{-1-c_1}$

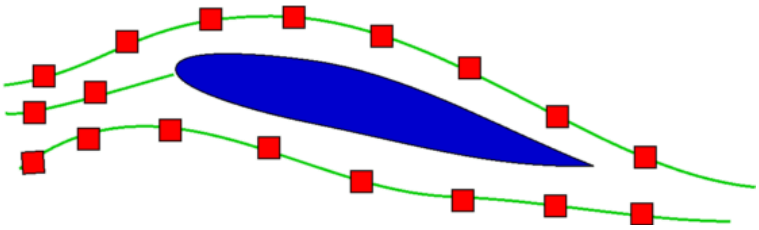
$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{M:} & c_2 & = & 0 \\ \text{T:} & -1 - c_1 & = & 0 \\ \text{L:} & 1 - 3c_2 + c_3 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \Longrightarrow \quad c_1 = -1 \\ \Longrightarrow \quad c_3 = -1 \end{array}\right\} \quad \Pi_3 = \frac{V}{n\,D} = J$$

$$\Phi\left(\frac{P}{\rho\, n^3\, D^5}, \frac{1}{Re}, \frac{V}{n\,D}\right) = 0$$

$$\frac{P}{\rho\, n^3\, D^5} = \Phi_1(\mathcal{R}e, \mathrm{J})$$

6 POTENCIJALNO STRUJANJE

Strujanje izvan graničnog sloja može se smatrati neviskoznim (nema trenja među slojevima struje) i nerotirajućim (čestice zraka ne rotiraju oko svojih osi nego se samo translatiraju duž strujnice – vidi sliku).



Takvo strujanje naziva se potencijalno strujanje jer ga je moguće opisati preko funkcije potencijala Φ koja zadovoljava sve osnovne zakone gibanja takvog nestlačivog, nerotirajućeg i neviskoznog fluida kao što su zakon o očuvanju mase (ili drukčije jednadžba kontinuiteta) i zakon o očuvanju količine gibanja.

Postupak rješavanja problema nestlačivog potencijalnog strujanja svodi se na određivanje polja brzine $\vec{V}$ jer je $\vec{V} = \nabla\Phi$, gdje je Φ zapravo skalarni potencijal brzine:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\ ; \qquad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Ukupni potencijal brzine je:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = udx + vdy$$

S obzirom da je nužno da polje brzina zadovoljava zakon o očuvanju mase, taj uvjet je zadovoljen kroz rješavanja Laplaceove jednadžbe:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

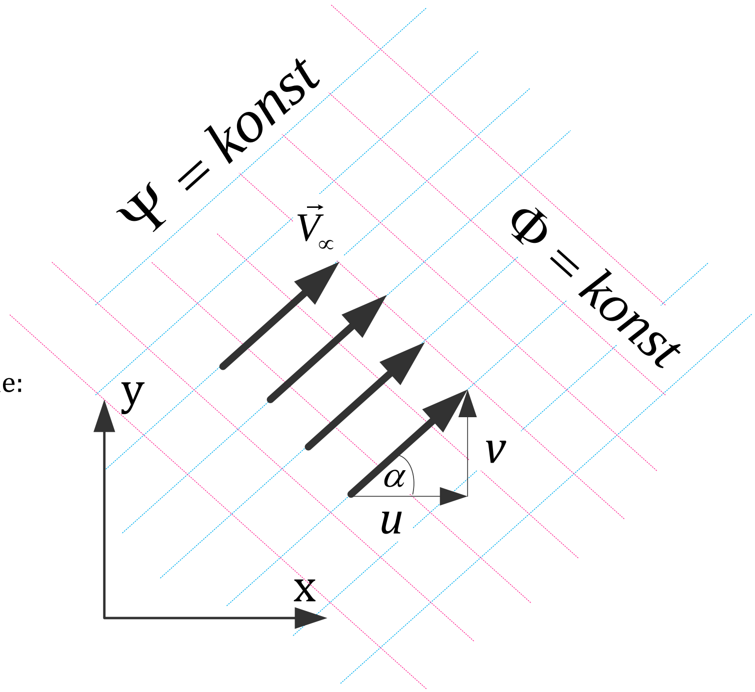
Linije konstantnih potencijala brzine $\Phi = konst.$, nazivaju se potencijalne linije strujanja.

One su uvijek okomite na strujnice Ψ. Veza između potecijalnih linija i strujnica naziva se Cauchy Riemann-ove jednadžbe ili uvjeti.

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{Cauchy-Riemann-ovi uvjeti}$$

Osnovna rješenja Laplaceove jednadžbe za ravninsko strujanje:

a) Paralelno strujanje



Zrak struji brzinom V_∞ pod napadnim kutom α .

$u = V_0 \cos\alpha$

$v = V_0 \sin\alpha$

Ukupni derivativ potencijala brzine je prema tome:

$\mathrm{d}\Phi = (V_\infty \cos\alpha)dx + (V_\infty \sin\alpha)dy$

Nakon integracije slijedi:

$$\int \mathrm{d}\Phi = \int (V_\infty \cos\alpha)dx + \int (V_\infty \sin\alpha)dy$$

$\Phi = (V_\infty \cos\alpha)x + (V_\infty \sin\alpha)y + C_1$

Strujnu f-ciju Ψ moguće je dobiti iz Cauchy-Riemanovih uvjeta. Slijedi:

$\mathrm{d}\Psi = -(V_\infty \sin\alpha)dx + (V_\infty \cos\alpha)dy$

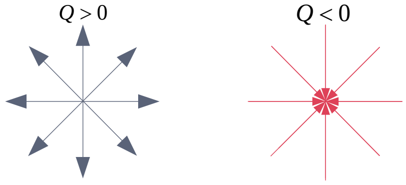
$$\Psi = -(V_\infty \sin\alpha)x + (V_\infty \cos\alpha)y + C_2$$

Φ $\rightarrow$ skalarni potencijal brzine

Ψ $\rightarrow$ strujna funkcija (vektori brzine su tangente na $\Psi = \text{konst}$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\partial\Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{ Cauchy-Riemann-ovi uvjeti}$$

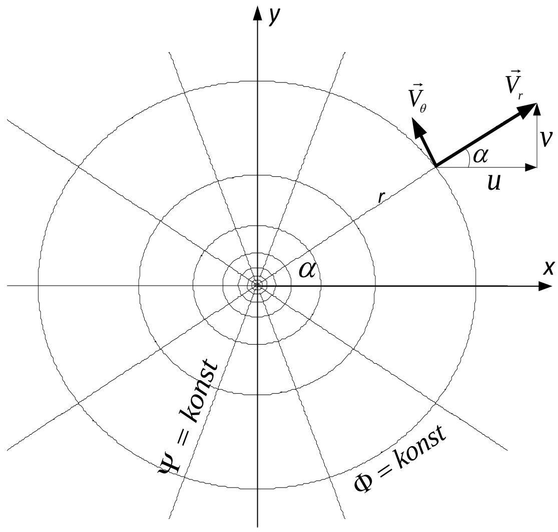
b) Izvor ili ponor



e)

$$Q\left[\frac{\mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right] \rightarrow \text{ kapacitet izvora po jedinici dužine okomit na ravninu } z$$

$$v_r = \frac{Q}{2r\pi}; \qquad v_\theta = 0$$



$$u = V_r\cos\alpha = \frac{Q}{2r\pi}\cdot\frac{x}{r} = \frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

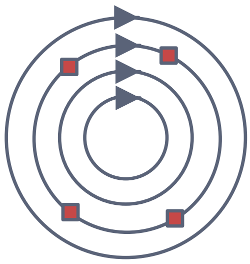
$$v = V_r\sin\alpha = \frac{Q}{2r\pi}\cdot\frac{y}{r} = \frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi}\ln(x^2+y^2) + C_3$$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{y}{x} + C_4$$

c) Vrtlog

$\Gamma > 0$



$$v_r = 0; \qquad v_\theta = \frac{K}{r} = \frac{\Gamma_0}{2r\pi}$$

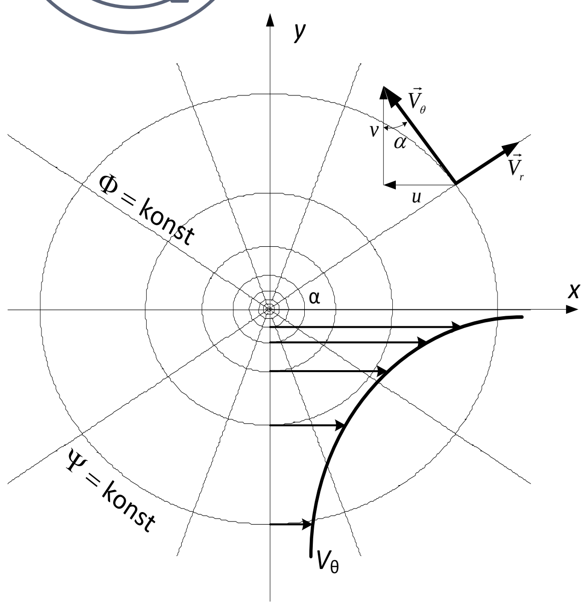
$$u = -V_\theta\sin\alpha = -\frac{K}{r}\cdot\frac{y}{r} = -\frac{Ky}{x^2+y^2}$$

$$v = V_\theta\cos\alpha = \frac{K}{r}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{Kx}{x^2+y^2}$$

$$\Phi = \frac{\Gamma_0}{2\pi}\alpha + C_5$$

$$\Psi = -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\ln r + C_6$$

$$K = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \rightarrow \text{ karakteristika strujanja}$$



Γ_0 → cirkulacija (pozitivna u smjeru kretanja kazaljke na satu)

Budući da funkcija potencijala i strujna funkcija zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu, zbrajanjem više funkcija potencijala dobiva se funkcija potencijala kombiniranog strujanja.

d) Superpozicija izvora i ponora istih kapaciteta

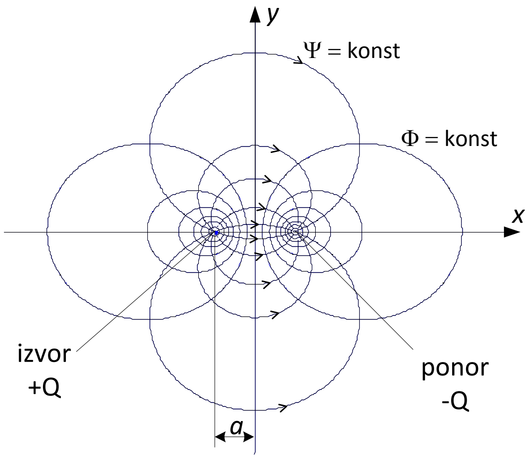
Zbrajanjem izraza za potencijal izvora kapaciteta Q u točki (-a,0) i izraza za potencijal ponora istog kapaciteta u točki (a,0) dobiva se potencijal kombinacije izvora i ponora.

$$\Phi = \Phi_{\text{izvor}} + \Phi_{\text{ponor}}$$

$$\Psi = \Psi_{\text{izvor}} + \Psi_{\text{ponor}}$$

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}} + C_7$$

$$\Psi = -\frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} + C_8$$



e) Dvopol

Potencijal dvopola nastaje na temelju potencijala kombinacije izvora i ponora primjenom graničnog procesa tako da se istovremeno izvor i ponor približavaju ishodištu $a \to 0$, kapaciteti teže beskonačnosti $Q \to \infty$, ali produkt članova teži konačnoj vrijednosti b, $2aQ \to b$.

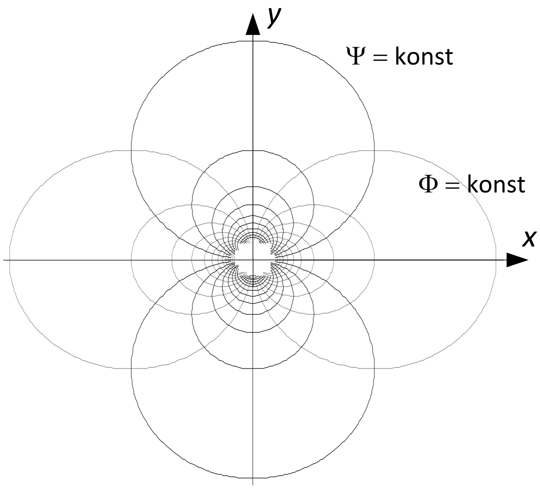
$$Q \to \infty$$

$$a \to 0$$

$$2aQ \to b$$

$$\Phi = \frac{b}{2\pi}\frac{\cos\alpha}{r} + C_9 = \frac{b}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} + C_9$$

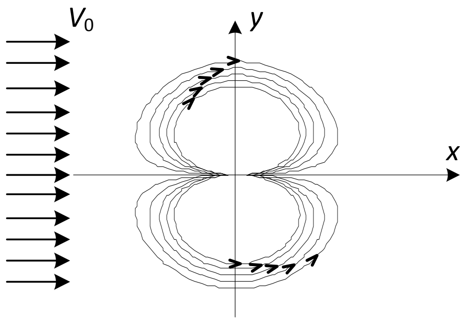
$$\Psi = -\frac{b}{2\pi}\frac{\sin\alpha}{r} + C_{10} = -\frac{b}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} + C_{10}$$



f) Kombinacija paralelno strujanje + dvopol ≡ strujanje oko cilindra

Zbrajanjem funkcija potencijala paralelnog strujanja i potencijala dvopola dobiva se nova funkcija potencijala koja predstavlja idealizirani slučaj strujanja oko cilindra radijusa r koji se nalazi u paralelnoj struji uniformnog rasporeda brzine u beskonačnosti V_0.

$$\Psi_{\mathrm{PS}} = V_0 r \sin\theta + C_1$$



$$\Psi_{\mathrm{DV}} = -\frac{b}{2\pi r}\sin\theta + C_2$$

$$\Psi = \Psi_{\mathrm{PS}} + \Psi_{\mathrm{DV}} = V_0 r \sin\theta - \frac{b}{2\pi r}\sin\theta + C_3$$

$$\Psi = \left(V_0 r - \frac{b}{2\pi r}\right)\sin\theta + C_3$$

V

$\Psi = konst = C$ — strujne linije (strujnice)

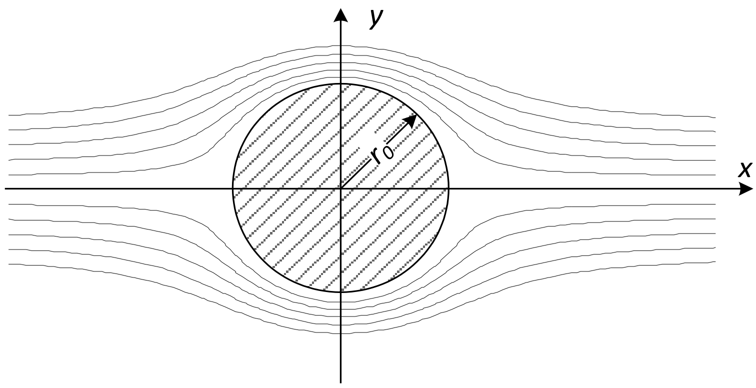
$$C = (V_0 r - \frac{b}{2\pi r})\sin\theta$$

$$C = 0$$

$$\sin\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = 0,\ \pm\pi,\ \dots\ (x - os)$$

$$\left(V_0 r - \frac{b}{2\pi r}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{b}{2\pi V_0}} = r_0 \qquad \to\ b = {r_0}^2 \cdot 2\pi V_0 \qquad (2aQ\ \to b)$$

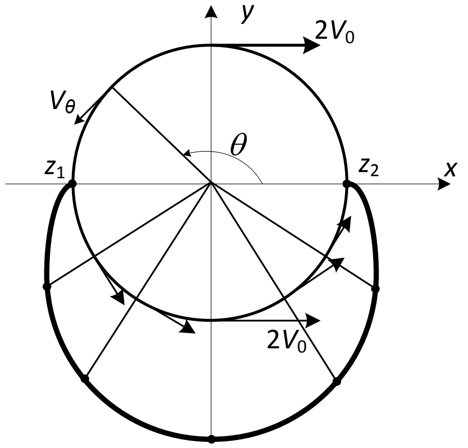
$$\Psi = (V_0 r - \frac{{r_0}^2 \cdot 2\pi V_0}{2\pi r})\sin\theta + C_3$$



$$\Psi = V_0\left(r - \frac{{r_0}^2}{r}\right)\sin\theta + C_3$$

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = V_0\left(1-\frac{{r_0}^2}{r^2}\right)\cos\theta \\ v_\theta &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -V_0\left(1+\frac{{r_0}^2}{r^2}\right)\sin\theta \end{aligned}\right\} \; r = r_0 \;\Longrightarrow\; \left.\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= -2V_0 \sin\theta \end{aligned}\right\} \text{brzina na cilindru } r = r_0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= v_r \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= v_\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{integriranjem} \quad \Phi = V_0\left(r+\frac{{r_0}^2}{r}\right)\cos\theta$$



Sila tlaka na cilindar

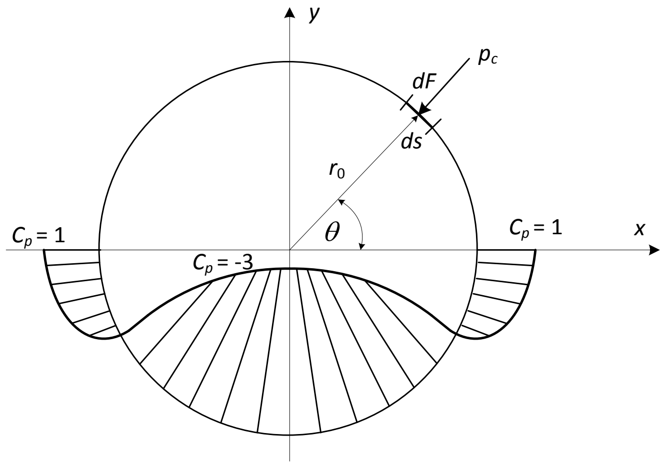
$$p_0 + \frac{1}{2}\rho {V_0}^2 + \rho g z_0 = p_c + \frac{1}{2}\rho {V_c}^2 + \rho g z_c \qquad B.J.$$

$$p_c = p_0 + \frac{1}{2}\rho {V_0}^2\left(1-\frac{{V_c}^2}{{V_0}^2}\right)$$

$$V_c = v_\theta = -2V_0 \sin\theta$$

$$p_c = p_0 + \frac{1}{2}\rho {V_0}^2\left(1-\frac{4{V_0}^2\sin^2\theta}{{V_0}^2}\right)$$

$$\boxed{p_c = p_0 + \frac{1}{2}\rho {V_0}^2(1-4\sin^2\theta)}$$



$$p_c - p_0 = \frac{1}{2}\rho {V_0}^2(1-4\sin^2\theta)$$

$$\frac{p_c - p_0}{\frac{1}{2}\rho {V_0}^2} \equiv C_p = (1-4\sin^2\theta)$$

$$dF = p_c ds = p_c r d\theta$$

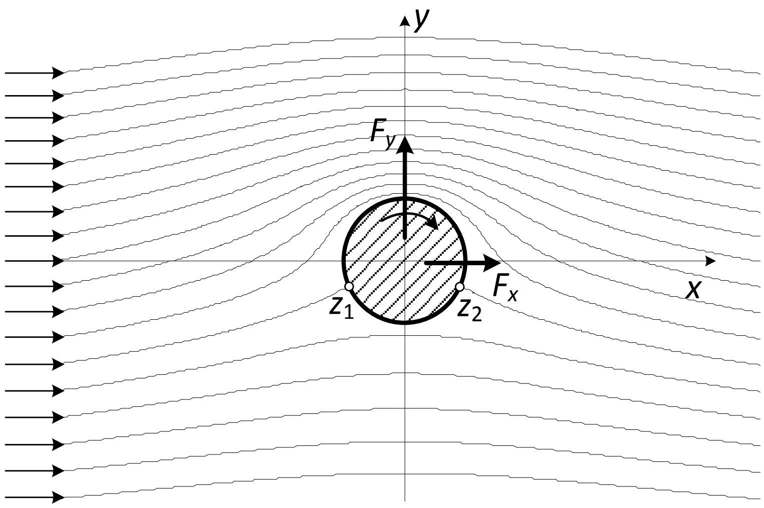
$$\left.\begin{aligned} dF_x &= -dF\cos\theta = -p_c r\cos\theta\, d\theta \\ dF_y &= -dF\sin\theta = -p_c r\sin\theta\, d\theta \end{aligned}\right\} \text{integriranje} \qquad \begin{aligned} F_x &= 0 \quad \rightarrow \text{D'Alambertov paradoks} \\ F_y &= 0 \end{aligned}$$

g) Kombinacija paralelno strujanje + dvopol +vrtlog ≡ strujanje oko cilindra s cirkulacijom

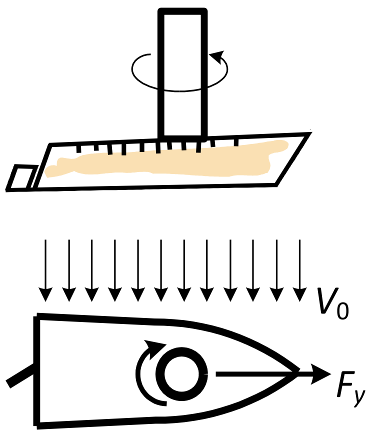
$$\Psi = V_0 r \sin\theta - \frac{b}{2\pi r}\sin\theta - \frac{\Gamma_0}{2\pi}\ln r$$

$$F_x = 0$$

$F_y = \Gamma_0 \rho V_0$ teorem Kutta i Žukovskog



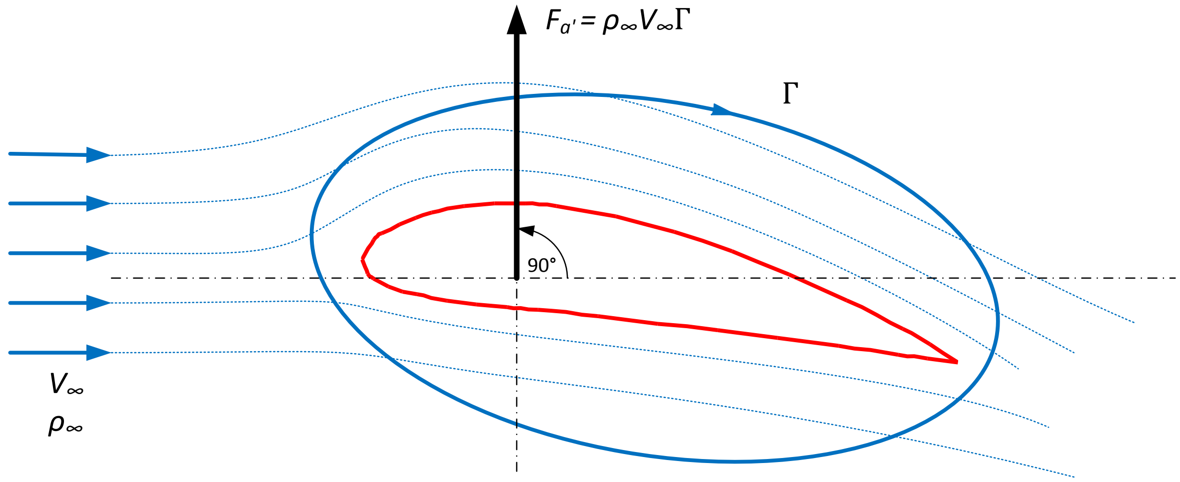
Magnus-ov efekt



Slika 6-1. Magnusov efekt po čijem principu je 1922. Anton Flettner osmislio pogonski sustav broda *Buckau* s rotirajućim cilindrima.

Odredi cirkulaciju oko aeroprofila pri brzini slobodne struje zraka od 60 m/s i gustoći 0,8 kg/m³, tako da sila uzgona bude 3600 N po metru raspona krila. **6.1**

Rješenje:



$F_{a'}$ − aerodinamička sila po jedinici raspona ($b = 1$ m)

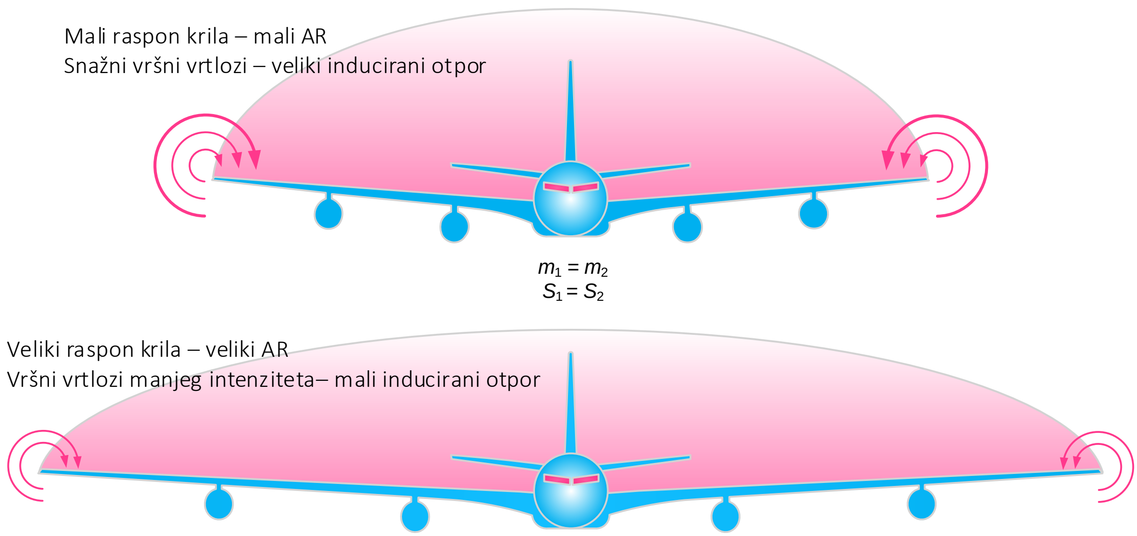
$$F_a = \rho_\infty V_\infty \Gamma \cdot b$$

$$\frac{F_a}{b} = F_{a'} = \rho_\infty V_\infty \Gamma$$

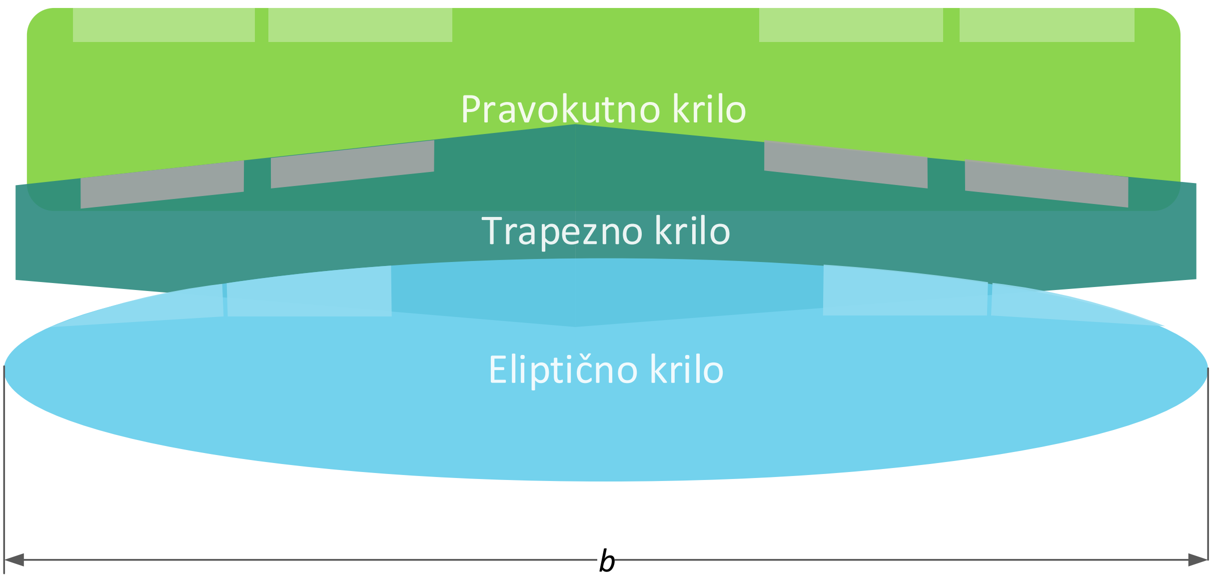
$$\Gamma = \frac{F_{a'}}{\rho_\infty V_\infty} = \frac{3600}{0.8 \cdot 60} = 75\ \mathrm{m/s^2}$$

7 KRILA

Za razliku od strujanja oko aeroprofila (krilo beskonačnog raspona), slika strujanja oko krila razlikuje se po presjeku od korjena do vrha. Dakle, dok aeroprofil predstavlja dvodimenzionalno tijelo, krilo je trodimenzionalno, pa se mora uzeti u obzir i komponenta strujanja duž raspona krila.



Naučinkovitije krilo ima eliptični oblik koji je zahtjevan za proizvodnju pa se koriste i drugi oblici ravnih krila kao što su trapezno i pravokutno krilo s kojima se postiže dovoljno dobar učinak stvaranja uzgona po jednici otpora.



7.1 **Avion ima eliptična krila površine 20 m² i raspona 10 m izrađena od ravne ploče. Promatra se let na visini 2000 m brzinom 400 km/h pod geometrijskim napadnim kutom od 4°. Odredi:**

a) kako se mijenja kut inducirane brzine za eliptično krilo,

b) silu uzgona,

c) silu otpora i

d) snagu potrebnu za savladavanje induciranog otpora.

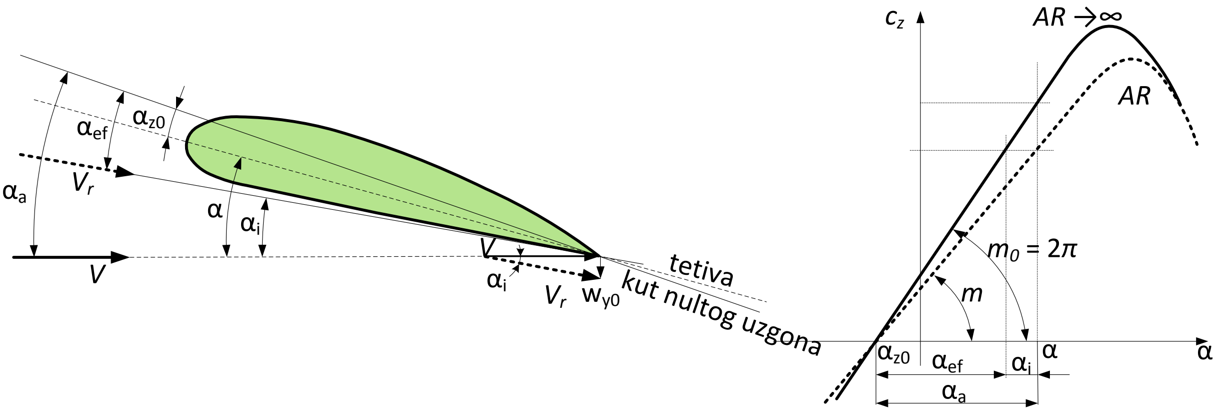
Napomena: smatrati da su lokalne vrijednosti koeficijenta uzgona za aeroprofil u obliku ravne ploče jednake idealnoj vrijednosti: $c_z = 2\pi\alpha$.

Rješenje:

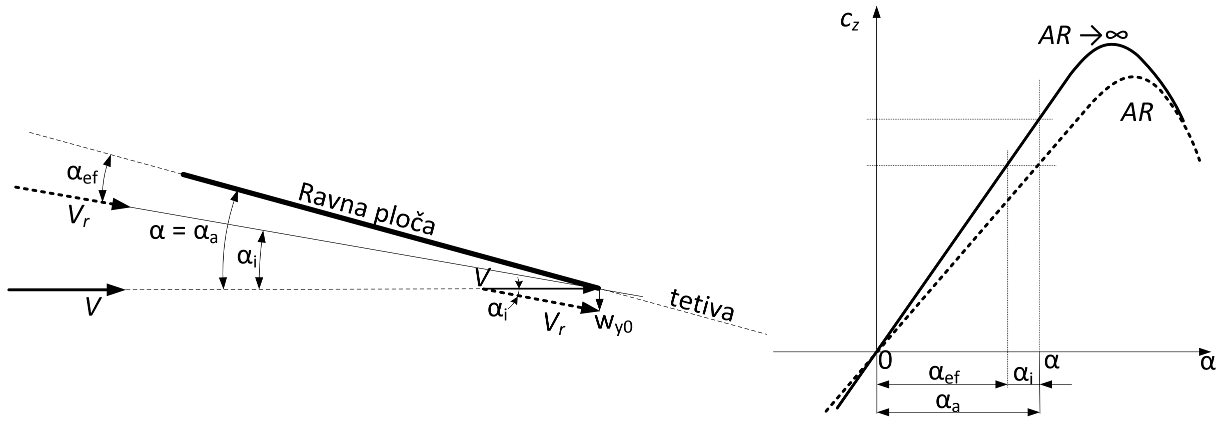
$$H = 2000\ \mathrm{m} \quad \rightarrow \quad \rho = 1{,}00646\ \ \mathrm{kg/m^3}$$

$$V\ =\ 400\ \ \mathrm{km/h}\ =\ 111{,}1\ \ \mathrm{m/s}$$

$$S = 20\ \mathrm{m}^2;\quad b = 10\ \mathrm{m} \quad \rightarrow AR = \frac{b^2}{S} = \frac{10^2}{20} = 5$$



Slika 7-1. Zakrivljeni aeroprofil krila



Slika 7-2. Simetrični aeroprofil krila

a) $AR \to \infty \quad \to \quad c_z = m_0 \cdot \alpha_a = 2\pi \cdot \alpha_a \qquad m_0 = 2\pi$

$$AR \quad \to m = \frac{m_0}{1 + \frac{m_0}{\pi AR}} = \frac{2\pi}{1 + \frac{2\pi}{\pi \cdot \mathrm{AR}}} = \frac{2\pi \cdot AR}{2 + AR} = \frac{2\pi \cdot 5}{2 + 5} = 4{,}488\ \mathrm{rad}^{-1}$$

$$C_z = m \cdot \alpha_a = 4{,}488 \cdot \alpha_a$$

$$\alpha_i = \frac{C_z}{\pi \cdot AR} = \frac{4{,}488 \cdot \alpha_a}{\pi \cdot 5} = 0{,}2857 \cdot \alpha_a$$

b) $\alpha_a = \alpha = 4° = 4 \cdot \dfrac{\pi}{180}\ \ \mathrm{rad}$

$$C_z = 4{,}488 \cdot \alpha_a = 4{,}488 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}313$$

$$Z = C_z \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot S = 0{,}313 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}00646 \cdot 111{,}1^2 \cdot 20 = 38{,}9\ \ \mathrm{kN}$$

c) $C_{xi} = \dfrac{{C_z}^2}{\pi AR}(1 + \delta) = \dfrac{{C_z}^2}{\pi e AR}$

$e = \dfrac{1}{1 + \delta}$ ... Oswaldov koeficijent (za eliptično krilo: $e = 1$; $\delta = 0$)

$$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR} = \frac{0{,}313^2}{\pi \cdot 5} = 0{,}00625$$

$$X_i = C_{xi} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot S = 0{,}00625 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}00646 \cdot 111{,}1^2 \cdot 20 = 776{,}4\ \ \mathrm{N}$$

d) $P_i = X_i \cdot V = 776{,}4 \cdot 111{,}1 = 86272\ \mathrm{W} \approx 86{,}3\ \mathrm{kW}$

<u>II način:</u>

$$\alpha_i = 0{,}2857 \cdot \alpha_a = 0{,}2857 \cdot 4 = 1{,}143°$$

$$\alpha_{ef} = \alpha_a - \alpha_i = 4 - 1{,}143 = 2{,}857°$$

$$\mathrm{C_z} = m_0 \cdot \alpha_{ef} = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}857 \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}3133$$

7.2 **Pravokutno krilo duljine tetive 2,4 m i raspona 14,4 m izrađeno je od aeroprofila NACA 1412 (str. 80). Odredi:**

a) ovisnost koeficijenta uzgona o napadnom kutu za krilo u odnosu na aeroprofil,

b) koeficijent uzgona i otpora pri *α* = 6°,

c) finesu krila i usporedi s finesom aeroprofila.

Rješenje:

a)

$\alpha_{z0} = -1°$

$\alpha_a = \alpha - \alpha_{z0} = \alpha + 1°$

m_0: $\alpha = 6° \implies \alpha_a = 7° \implies c_z = 0{,}8$

$$m_0 = \frac{c_z}{\alpha_a} = \frac{0{,}8}{7} = 0{,}1143 \quad 1/°$$

$$c_z = 0{,}1143 \cdot \alpha_a[°]$$

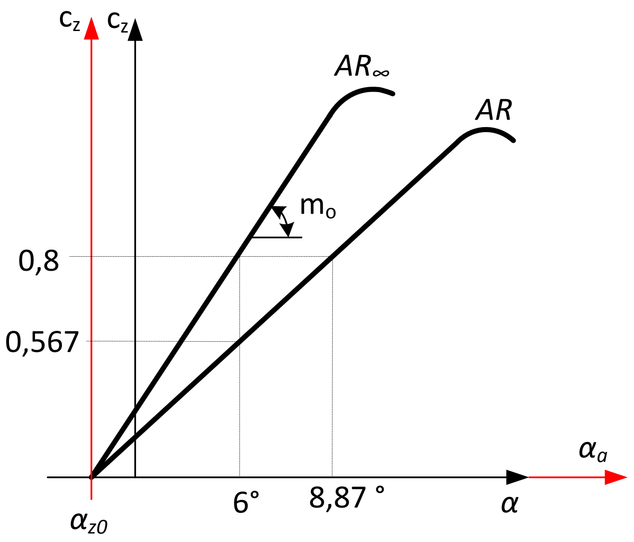
$$c_z = 0{,}1143 \cdot 57{,}3 \cdot \alpha_a = 6{,}5481 \cdot \alpha_a[\mathrm{rad}]$$

$$S = b \cdot c = 2{,}4 \cdot 14{,}4 = 34{,}56 \ \ \mathrm{m}^2$$

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{14{,}4^2}{34{,}56} = 6 \ \rightarrow \tau = 0{,}18$$

(vidi P. Kesić: *Osnove aerodinamike*, str.213, tablica 8.7.1)

$AR_2 \rightarrow \infty \qquad \alpha_2 = 6° \quad \rightarrow \quad c_z = 0{,}8$



$$\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{C_z}{\pi}\left(\frac{1+\tau_1}{AR_1} - \frac{1+\tau_2}{AR_2}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{6}{57{,}3} + \frac{0{,}8}{\pi}\left(\frac{1+0{,}18}{6} - 0\right) = 0{,}1548 \ \ \mathrm{rad} = 8{,}87°$$

$$\alpha_{a1} = \alpha_1 - \alpha_{z0} = 8{,}87 + 1 = 9{,}87°$$

$$m = \frac{\Delta C_z}{\Delta\alpha} = \frac{0{,}8}{9{,}87/57{,}3} = 4{,}644 \ \ \mathrm{rad}^{-1}$$

b) $\alpha = 6° \implies \quad \alpha_a = 7° \implies c_z = 0{,}8$

$$C_z = m \cdot \alpha_a = 4{,}644 \cdot \frac{7}{57{,}3} = 0{,}567$$

$c_x = 0{,}008$ za $c_z = 0{,}8$

$AR = 6, \quad \lambda = 1 \implies \delta = 0{,}043$ (vidi P. Kesić: *Osnove aerodinamike*, str.205, slika 8.6.1)

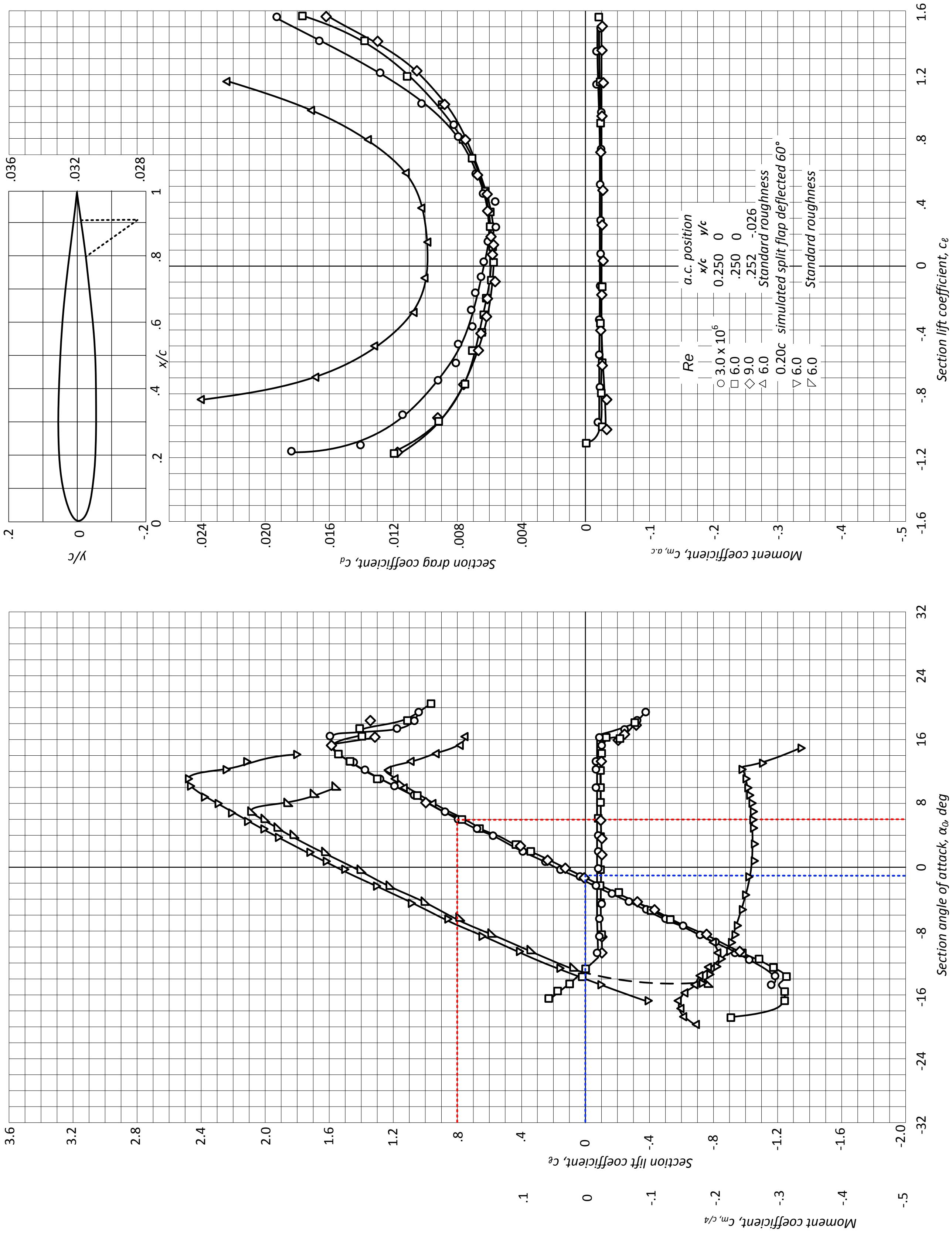
$$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR}(1+\delta) = \frac{0{,}567^2}{\pi \cdot 6}(1+0{,}043) = 0{,}01779$$

$$C_x = c_x + C_{xi} = 0{,}008 + 0{,}01779 = 0{,}02579$$

c) $f_{aeroprofil} = \dfrac{c_z}{c_x} = \dfrac{0{,}8}{0{,}008} = 100$ ... aeroprofil

$f_{krilo} = \dfrac{C_z}{C_x} = \dfrac{0{,}567}{0{,}02579} = 22$ ... pravokutno krilo

NACA 1412


Section lift coefficient, cℓ
Section angle of attack, α0, deg
Section drag coefficient, cd
Moment coefficient, cm, a.c.
Moment coefficient, cm, c/4
x/c
y/c
Re
a.c. position
x/c y/c
3.0 x 10^6 0.250 0
6.0 .250 0
9.0 .252 -.026
6.0 Standard roughness
0.20c simulated split flap deflected 60°
6.0
6.0 Standard roughness

7.3

Na grafovima su dane aerodinamičke karakteristike za aeroprofil NACA 23018 (str. 84). Nacrtaj polare:

a) aeroprofila, te

b) eliptičnog i

c) pravokutnog

krila izrađenog od istog aeroprofila za napadne kutove pri kojima je ovisnost dc_z /dα linearna. Odredi finese aeroprofila i oba krila, ako je aspektni odnos oba krila 6.

Rješenje:

a) Aeroprofil

$$\alpha_{z0} = -1°$$

$$\alpha_a = \alpha - \alpha_{z0} = \alpha + 1°$$

$$m_0:\quad \left.\begin{array}{lllll} \alpha_{z0} = -1° & \Longrightarrow & \alpha_a = 0° & \Longrightarrow & c_z = 0 \\ \alpha = 6° & \Longrightarrow & \alpha_a = 7° & \Longrightarrow & c_z = 0{,}7 \end{array}\right\} \quad c_z - 0 = \frac{0{,}7-0}{7-0}(\alpha_a - 0) \;\Rightarrow\; c_z = \frac{0{,}7}{7}\cdot\alpha_a$$

$$c_z = 0{,}1\cdot\alpha_a\ [°]$$

$$c_z = 0{,}1\cdot\frac{180}{\pi}\alpha_a = 5{,}730\cdot\alpha_a[\text{rad}]$$

b) Eliptično krilo

$$m = \frac{m_0}{1+\frac{m_0}{\pi AR}} = \frac{5{,}730}{1+\frac{5{,}730}{\pi\cdot 6}} = 4{,}394\ \ \text{rad}^{-1}$$

$$C_z = m\cdot\alpha_a = 4{,}394\cdot\alpha_a \qquad (1)$$

$$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR} \qquad (2)$$

$$C_{x_{uk}} = c_x + C_{xi} \qquad (3)$$

c) Pravokutno krilo

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{C_z}{\pi}\left(\frac{1+\tau_1}{AR_1} - \frac{1+\tau_2}{AR_2}\right)$$

τ – konstanta čija vrijednost ovisi o obliku krila i AR tzv. Glauertova korekcija za neeliptična krila (P. Kesić: *Osnove aerodinamike*, str. 213)

$\alpha_2 = 6° \implies \quad \alpha_{a2} = 7° \implies c_z = 0{,}7 = C_z$

$AR_1 = 6 \quad \rightarrow \quad \tau_1 = 0{,}18$

$AR_2 \rightarrow \infty$

$\alpha_{z0_1} = \alpha_{z0_2} = \alpha_{z0}$ jer su istog aeroprofila, pa slijedi:

$$\alpha_{a1} = \alpha_{a2} + \frac{C_z}{\pi}\frac{1+\tau_1}{AR_1} = 7 \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{0{,}7}{\pi}\frac{1+0{,}18}{6} = 0{,}166 \text{ rad} = 9{,}5°$$

$\alpha_1 = 8{,}5°$

$$m = \frac{C_z}{\alpha_{a1}} = \frac{0{,}7}{0{,}166} = 4{,}217 \ \text{rad}^{-1} = 0{,}0737 \text{ po } °$$

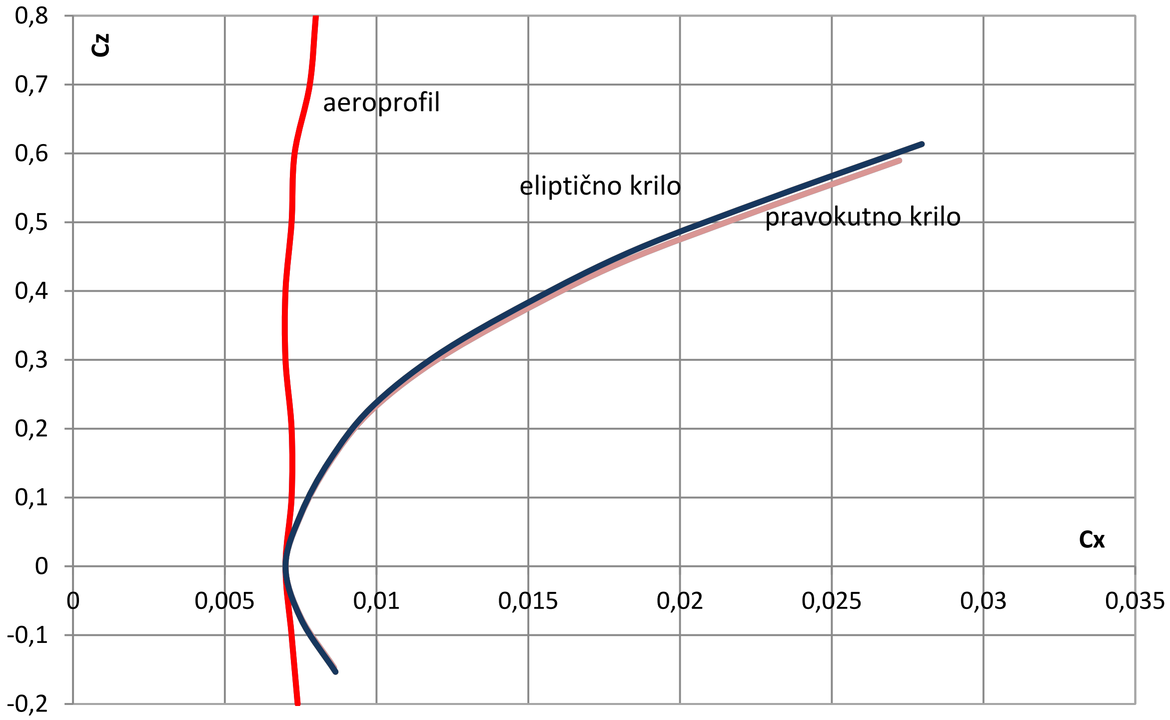
$$C_z = m \cdot \alpha_a = 4{,}217 \cdot \alpha_a \tag{4}$$

$$C_{x_i} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR}(1+\delta)$$

$\lambda = 1$ (pravokutno krilo) $\quad AR = 6 \quad \rightarrow \quad \delta = 0{,}042$

$$C_{x_i} = \frac{{C_z}^2}{6\pi}(1+0{,}042) = 0{,}0553{C_z}^2 \tag{5}$$

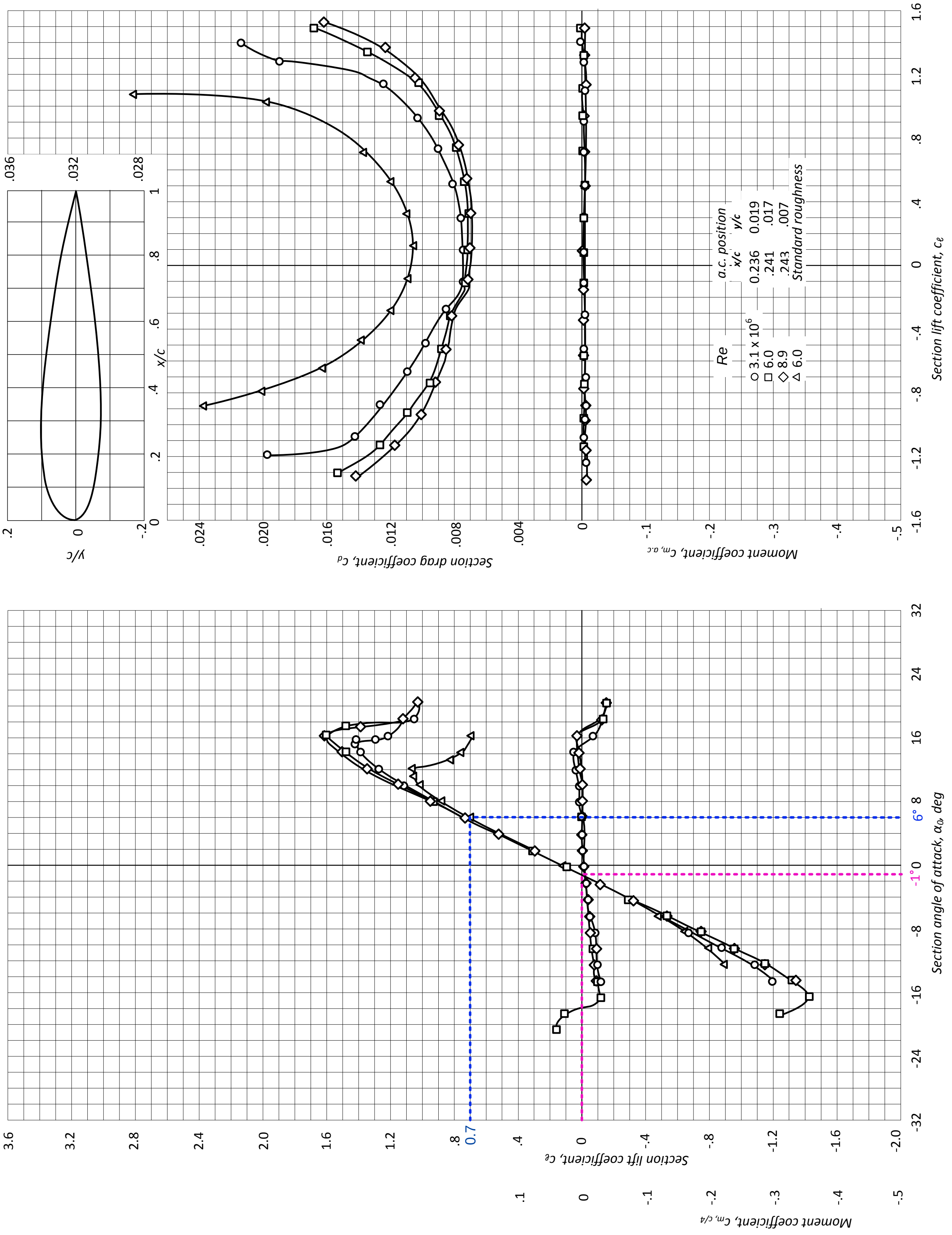
$$C_{x_{uk}} = c_x + C_{xi} \tag{6}$$



Tablica 7-1. Finesa aeroprofila NACA 23018, te eliptičnog i pravokutnog krila izrađenog od istog aeroprofila

Aeroprofil	α	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
	α_a[°]	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	α_a [rad]	-0,0349	-0,0175	0	0,0175	0,0349	0,0524	0,0698	0,0873	0,1047	0,1222	0,1396
	c_z	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	c_x	0,0074	0,0072	0,007	0,0072	0,0072	0,007	0,007	0,0072	0,0073	0,0078	0,008
	c_z/c_x	-27,03	-13,89	0	13,89	27,78	42,86	57,14	69,44	82,19	89,74	**100**
Eliptično krilo	C_z (1)	-0,1534	-0,0767	0	0,0767	0,1534	0,2301	0,3068	0,3834	0,4601	0,5368	0,6135
	C_{xi} (2)	0,0012	0,0003	0	0,0003	0,0012	0,0028	0,0050	0,0078	0,0112	0,0153	0,0200
	C_{xuk} (3)	0,0086	0,0075	0,007	0,0075	0,0084	0,0098	0,0120	0,0150	0,0185	0,0231	0,0280
	C_z/C_{xuk}	-17,74	-10,21	0	10,21	18,16	23,46	**25,58**	25,56	24,83	23,25	21,94
Pravokutno krilo	C_z (4)	-0,1474	-0,0737	0	0,0737	0,1474	0,2211	0,2948	0,3685	0,4422	0,5159	0,5896
	C_{xi} (5)	0,0012	0,0003	0	0,0003	0,0012	0,0027	0,0048	0,0075	0,0108	0,0147	0,0192
	C_{xuk} (6)	0,0086	0,0075	0,007	0,0075	0,0084	0,0097	0,0118	0,0147	0,0181	0,0225	0,0272
	C_z/C_{xuk}	-17,14	-9,83	0	9,83	17,54	22,79	24,97	**25,05**	24,41	22,91	21,66

NACA 23018



Section lift coefficient, c_ℓ
Section drag coefficient, c_d
Moment coefficient, $c_{m, a.c.}$
y/c
x/c
Section angle of attack, α_0, deg
Section lift coefficient, c_ℓ
Moment coefficient, $c_{m, c/4}$
Re
○ 3.1 x 10^6
□ 6.0
◇ 8.9
△ 6.0
a.c. position
x/c y/c
0.236 0.019
.241 .017
.243 .007
Standard roughness
0.7
6°
-1°

Nacrtaj polare eliptičnih krila izrađenih od istog aeroprofila, NACA 23018 (str. 84), različitih aspektnih odnosa *AR* = 4, 6, 8 i 10 za napadne kutove pri kojima je ovisnost dc_z ⁄ dα linearna. Odredi finese krila. **7.4**

Rješenje:

<u>Aeroprofil NACA 23018</u>

$$\alpha_{z0} = -1°$$

$$\alpha_a = \alpha - \alpha_{z0} = \alpha + 1° \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} m_0: \quad \alpha_{z0} = -1° \implies \alpha_a = 0° \implies c_z = 0 \\ \alpha = 6° \implies \alpha_a = 7° \implies c_z = 0{,}7 \end{aligned}\right\} \quad (c_z - 0) = \frac{0{,}7 - 0}{7 - 0}(\alpha_a - 0)$$

$$c_z = 0{,}1 \cdot \alpha_a[°] \qquad (2)$$

$$c_z = 0{,}1 \cdot \frac{180}{\pi}\alpha_a = 5{,}730 \cdot \alpha_a[\text{rad}] \quad \rightarrow \quad m_0 = 5{,}730 \ \ \text{rad}^{-1}$$

f)

<u>Eliptično krilo izrađeno od aeroprofila NACA 23018</u>

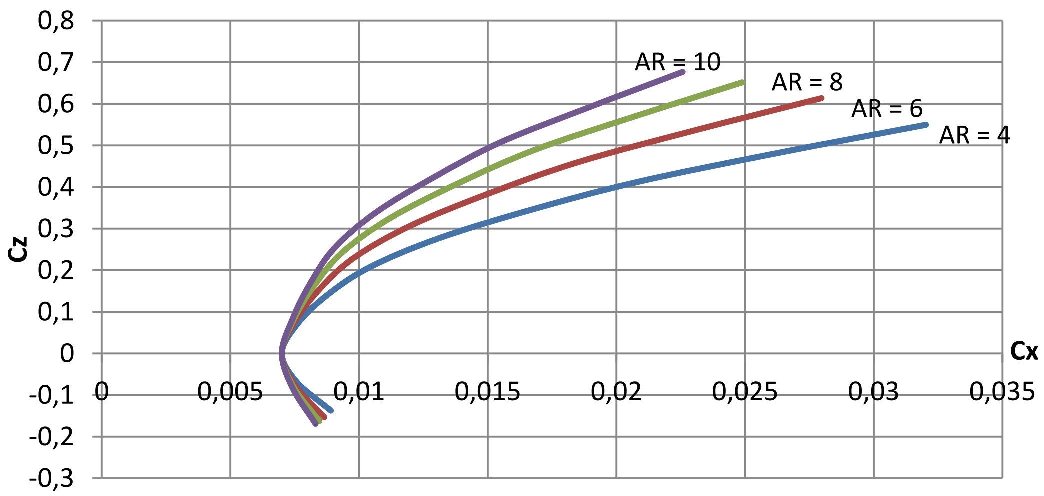
$$m = \frac{m_0}{1 + \frac{m_0}{\pi AR}} \qquad (3)$$

$$C_z = m \cdot \alpha_a \qquad (4)$$

$$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR} \qquad (5)$$

$$C_{x_{uk}} = c_x + C_{xi} \qquad (6)$$

AR	***m* (1)**
4	3,936
6	4,394
8	4,666
10	4,846
12	4,974



Aeroprofil NACA 23018						Eliptično krilo AR = 4 , m = 3,936			
α	α_a [°] (1)	α_a [rad]	c_z (2)	c_x	c_z/c_x	C_z (4)	C_{xi} (5)	C_{xuk} (6)	C_z/C_{xuk}
-3	-2	-0,0349	-0,2	0,0074	**-27,03**	-0,1374	0,0015	0,0089	**-15,43**
-2	-1	-0,0175	-0,1	0,0072	**-13,89**	-0,0687	0,0004	0,0076	**-9,07**
-1	0	0	0	0,007	**0**	0	0	0,0070	**0**
0	1	0,0175	0,1	0,0072	**13,89**	0,0687	0,0004	0,0076	**9,07**
1	2	0,0349	0,2	0,0072	**27,78**	0,1374	0,0015	0,0087	**15,79**
2	3	0,0524	0,3	0,007	**42,86**	0,2060	0,0034	0,0104	**19,85**
3	4	0,0698	0,4	0,007	**57,14**	0,2747	0,0060	0,0130	**21,12**
4	5	0,0873	0,5	0,0072	**69,44**	0,3434	0,0094	0,0166	**20,71**
5	6	0,1047	0,6	0,0073	**82,19**	0,4121	0,0135	0,0208	**19,80**
6	7	0,1221	0,7	0,0078	**89,74**	0,4808	0,0184	0,0262	**18,35**
7	8	0,1396	0,8	0,008	**100,00**	0,5495	0,0240	0,0320	**17,16**

	Eliptično krilo AR = 8, m = 4,666				Eliptično krilo AR = 10, m = 4,846			
α	C_z (4)	C_{xi} (5)	C_{xuk} (6)	C_z/C_{xuk}	C_z (4)	C_{xi} (5)	C_{xuk} (6)	C_z/C_{xuk}
-3	-0,1629	0,001055	0,0085	**-19,26**	-0,1692	0,000911	0,0083	**-20,35**
-2	-0,08143	0,000264	0,0075	**-10,91**	-0,0846	0,000228	0,0074	**-11,39**
-1	0	0	0,0070	**0**	0	0	0,0070	**0**
0	0,081434	0,000264	0,0075	**10,91**	0,0846	0,000228	0,0074	**11,39**
1	0,162868	0,001055	0,0083	**19,73**	0,1690	0,000911	0,0081	**20,85**
2	0,244302	0,002375	0,0094	**26,06**	0,2537	0,002049	0,0090	**28,04**
3	0,325736	0,004222	0,0112	**29,03**	0,3383	0,003643	0,0106	**31,79**
4	0,40717	0,006596	0,0138	**29,51**	0,4229	0,005692	0,0129	**32,80**
5	0,488604	0,009499	0,0168	**29,09**	0,5074	0,008197	0,0155	**32,75**
6	0,570037	0,012929	0,0207	**27,50**	0,5920	0,011156	0,0190	**31,23**
7	0,651471	0,016887	0,0249	**26,18**	0,6766	0,014572	0,0226	**29,98**

Za eliptično krilo površine 24 m² i raspona 12 m iz aeroprofila NACA 23015 odredi i grafički prikaži kako se mijenjaju koeficijenti uzgona i otpora za napadne kutove od -10 do +10°. **7.5**

Rješenje:

Prema podacima iz (Abbot 1959):

$\alpha_{z0} = -1°$

$\alpha_a = \alpha - \alpha_{z0} = \alpha + 1°$

$m_0\!: \quad \alpha_{z0} = -1° \implies \quad \alpha_a = 0° \implies c_z = 0$

$\alpha = 2° \quad \implies \quad \alpha_a = 3° \implies c_z = 0{,}32$

$$m_0 = \frac{c_z}{\alpha_a} = \frac{0.32}{3} = 0{,}107 \ /°$$

$c_z = 0{,}107 \cdot \alpha_a[°]$

$c_z = 0{,}107 \cdot (\alpha + 1)$ za $\alpha[°]$ (1)

$$c_z = 0{,}107 \cdot \frac{180}{\pi} \alpha_a = 6{,}112 \cdot \alpha_a[\text{rad}]$$

$m_0 = 6{,}112 \ \text{rad}^{-1}$

α [°]	**-10**	**-8**	**-6**	**-4**	**-2**	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
c_z (1)	-0,963	-0,749	-0,535	-0,321	-0,107	0,107	0,321	0,535	0,749	0,963	1,177
c_x	0,014	0,0114	0,0098	0,009	0,008	0,007	0,0072	0,0077	0,0088	0,0115	0,0118

$$AR = \frac{b^2}{S} = \frac{12^2}{24} = 6$$

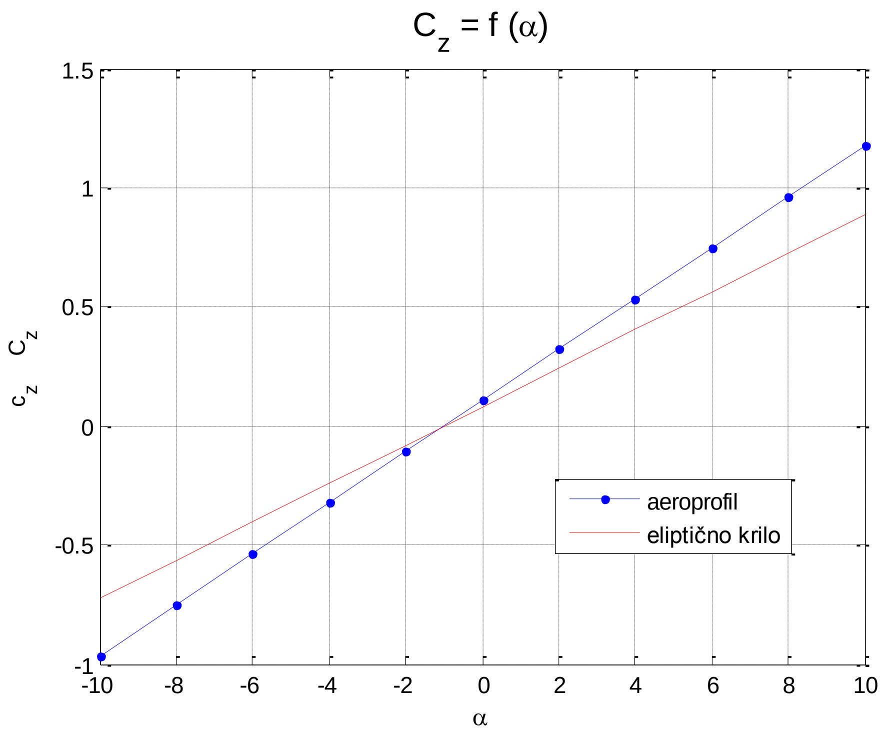
$$m = \frac{m_0}{1 + \frac{m_0}{\pi AR}} = \frac{6{,}112}{1 + \frac{6{,}112}{\pi \cdot 6}} = 4{,}615 \ \text{rad}^{-1}$$

$C_z = m \cdot \alpha_a = 4{,}615 \cdot \alpha_a[\text{rad}]$

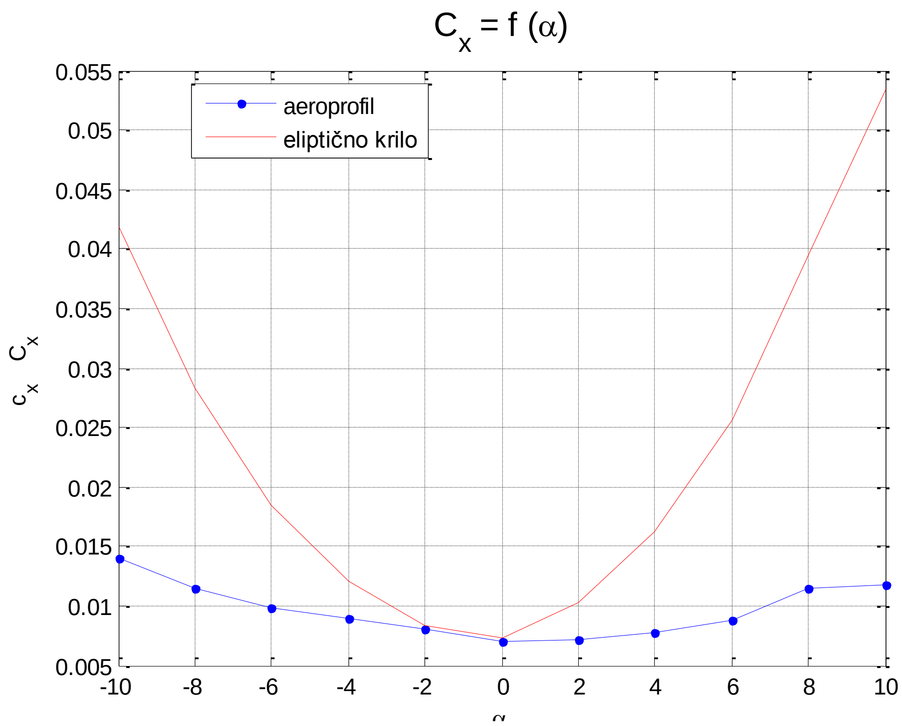
$$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR}$$

$C_{x_{uk}} = c_x + C_{xi}$

```
%% Koeficijent uzgona i koeficijent otpora eliptičnog krilo površine
% 24 m^2 i raspona 12 m iz aeroprofila NACA 23015 za napadne kutove
% od -10 do +10°.


b=12; %[m] raspon
A=24; %[m2] površina krila
alpha=[-10:2:10]';
AR=b^2/A;
alpha_aps=alpha+1;
cz=0.107*alpha_aps;
cx=[0.014;0.0114;0.0098;0.009;0.008;0.007;0.0072;0.0077;0.0088;0.0115;0.0
118]
Cz=4.615*alpha_aps/57.3;
Cxi=Cz.^2/(pi*AR)
Cx=Cxi+cx;
figure(1)
plot(alpha,cz,'b.-',alpha,Cz,'r')
xlabel('\alpha');ylabel('c_z    C_z')
title('C_z = f (\alpha)','fontsize',14)
legend('aeroprofil','eliptično krilo',0)
grid on
figure(2)
plot(alpha,cx,'b.-',alpha,Cx,'r')
xlabel('\alpha');ylabel('c_x   C_x')
title('C_x = f (\alpha)','fontsize',14)
legend('aeroprofil','eliptično krilo',0)
grid on
```



C_z = f (α)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
α
c_z C_z
aeroprofil
eliptično krilo



C_x = f (α)
0.055
0.05
0.045
0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
c_x C_x
aeroprofil
eliptično krilo

7.6 **Za pravokutno krilo površine 20 m² i raspona 11 m iz aeroprofila NACA 2415 (str. 52) odredi i grafički prikaži kako se mijenjaju koeficijenti uzgona i otpora za napadne kutove od -8 do +8°.**

Rješenje:

$\boldsymbol{\alpha}$ [°]	**-8**	**-6**	**-4**	**-2**	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**
$\boldsymbol{c_z}$ **(1)**	-0,749	-0,535	-0,321	-0,107	0,107	0,321	0,535	0,749	0,963
$\boldsymbol{c_x}$ **(dijag.)**	0,0114	0,0098	0,009	0,008	0,007	0,0072	0,0077	0,0088	0,0115

$\alpha_{z0} = -2°$

$\alpha_a = \alpha - \alpha_{z0} = \alpha + 2°$

$m_0\colon \quad \alpha_{z0} = -2° \implies \quad \alpha_a = 0° \implies c_z = 0$

$\qquad\qquad \alpha = 4° \quad \implies \quad \alpha_a = 6° \implies c_z = 0{,}63$

$$m_0 = \frac{c_z}{\alpha_a} = \frac{0{,}63}{6} = 0{,}105$$

$$c_z = 0{,}105 \cdot \alpha_a[°] \quad \rightarrow \quad c_z = 0{,}105 \cdot (\alpha + 2) \quad \text{za } \alpha[°] \quad (1)$$

$$c_z = 0{,}105 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \alpha_a = 6{,}016 \cdot \alpha_a[\text{rad}] \quad \Rightarrow m_0 = 6{,}016 \ \text{rad}^{-1}$$

$$AR_1 = \frac{b^2}{S} = \frac{12^2}{24} = 6$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{c_z}{\pi}\left(\frac{1+\tau_1}{AR_1} - \frac{1+\tau_2}{AR_2}\right) = \alpha_2 + \frac{c_z}{\pi}\left(\frac{1+\tau_1}{AR_1}\right)$$

$\tau_1 = 0{,}18$

$$m = \frac{C_z}{\alpha_{a1}}$$

$$\alpha_2 = 4° \rightarrow c_z = C_z = 0{,}63 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 + \frac{c_z}{\pi}\left(\frac{1+\tau_1}{AR_1}\right) = \frac{4}{57{,}3} + \frac{0.63}{\pi}\left(\frac{1+0{,}18}{6}\right) = 0{,}109 \ \text{rad}$$

$$\alpha_{a1} = \alpha_1 + 2° = 0{,}109 + \frac{2}{57{,}3} = 0{,}144 \ \text{rad}$$

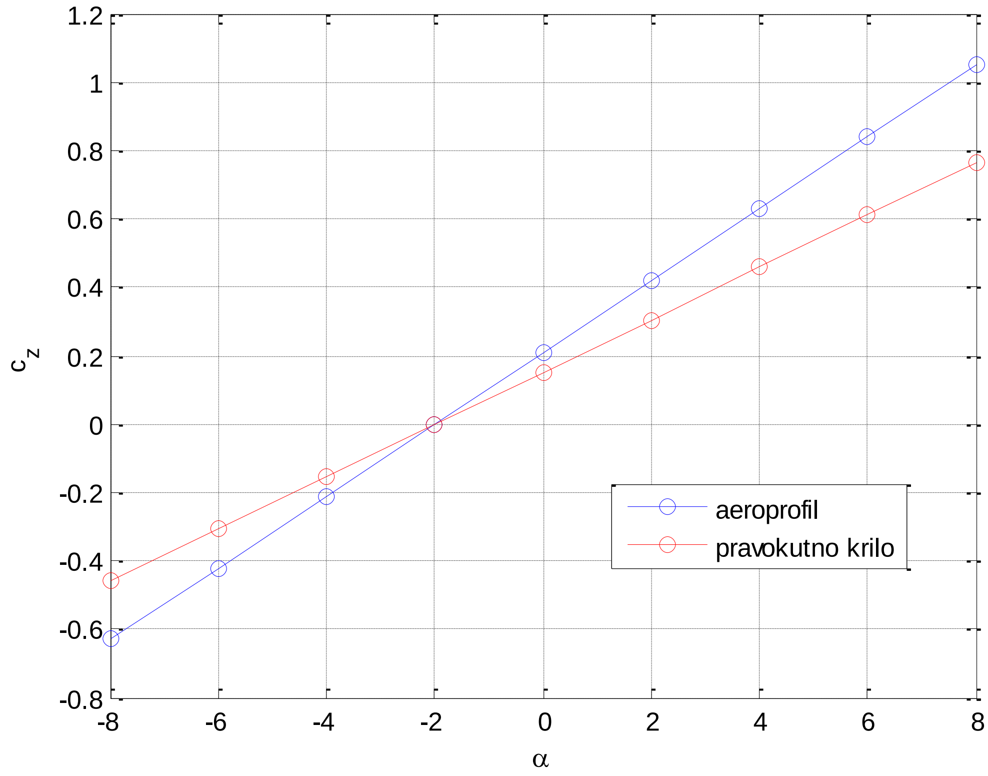
$$m = \frac{C_z}{\alpha_{a1}} = \frac{0{,}63}{0{,}144} = 4{,}37 \ \frac{1}{\text{rad}} \qquad \rightarrow \qquad C_z = m \cdot \alpha_a = 4{,}37 \cdot \alpha_a$$

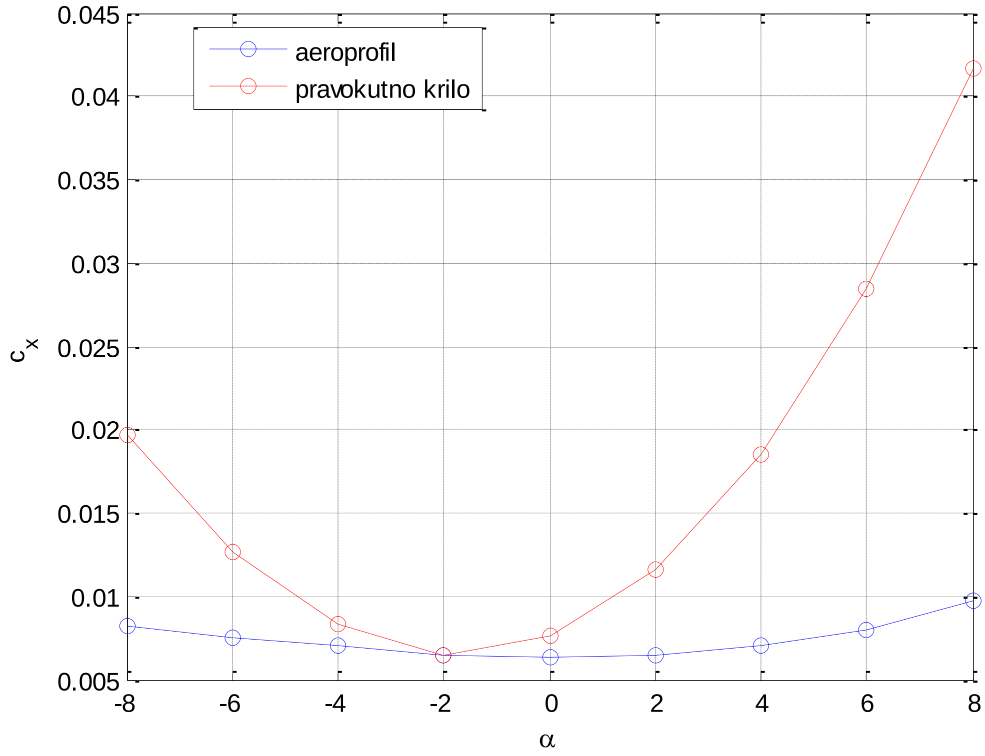
$$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR}$$

$$C_{x_{uk}} = c_x + C_{xi}$$

```
%% Ovisnost koeficijenta uzgona i otpora pravokutnog krila površine
% 20 m^2 i raspona 11 m iz aeroprofila NACA 2415 za napadne kutove
% od -8 do +8°.
b=11; A=20;
AR=b^2/A;
alpha=-8:2:8; %[°]
m0=0.105;
aZ0=-2;
aA=alpha-aZ0;
tau=0.18; %za AR=6
cz=m0*aA;
cx=[0.0082 0.0075 0.007 0.0065 0.0063 0.0065 0.007 0.008 0.0097];
a2=alpha;
Cz=4.37*aA/57.3;
delta=0.043; e=(1+delta)^-1;% Osnove aerodinamike str. 205.
Cxi=Cz.^2/(pi*e*AR);
Cx=Cxi+cx;
figure(1)
plot (alpha,cz,'b-o',alpha,Cz,'r-o')
xlabel ('\alpha');ylabel('c_z')
legend('aeroprofil','pravokutno krilo',0)
grid on
figure(2)
plot (alpha,cx,'b-o',alpha,Cx,'r-o')
xlabel ('\alpha');ylabel('c_x')
```

```
legend('aeroprofil','pravokutno krilo',0)

grid on
```

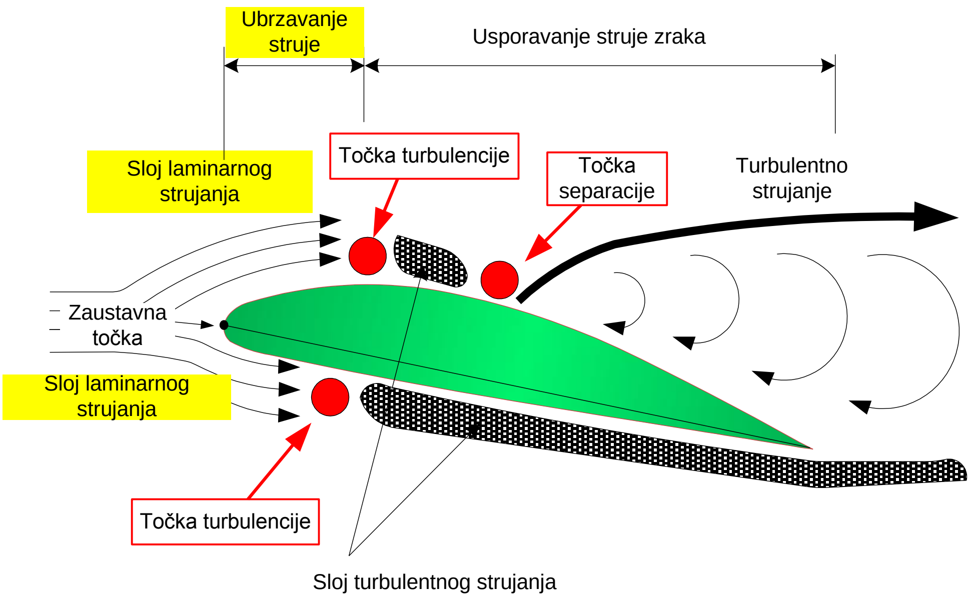




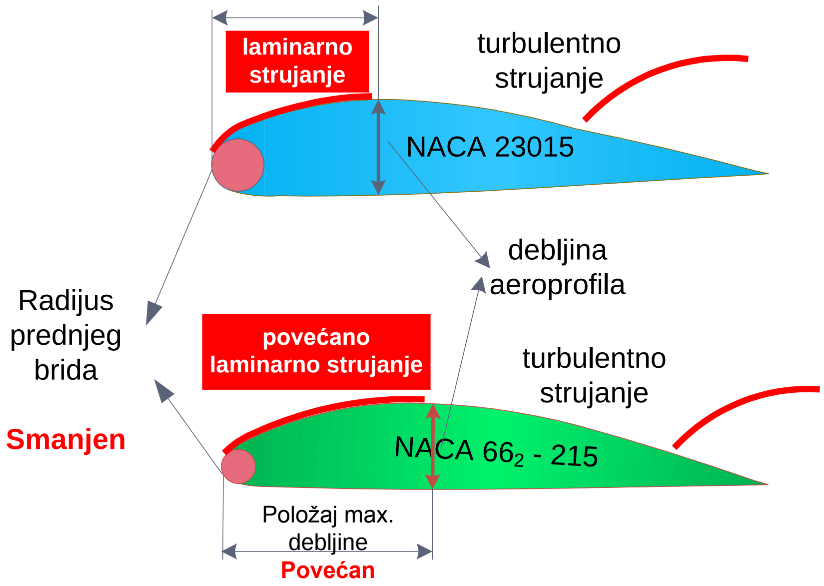
8 STRUJANJE VISKOZNOG FLUIDA

Strujanje fluida oko zrakoplova rezultira aerodinamičkom silom. Komponente aerodinamičke sile su otpor i uzgon. Sila otpora posljedica je djelovanja tangencijalnog naprezanja (trenja) i tlaka na površinu zrakoplova. Sila otpora zbog trenja je dominantna sila u tankom području iznad aeroprofila koji se naziva granični sloj. Unutar graničnog sloja brzina fluida naglo se mijenja po debljini sloja. U slučaju kada tijelo miruje, brzina po debljini sloja mijenja se od 0 do brzine slobodne struje zraka. Posljedica promjene brzine po debljini sloja (gradijent brzine s udaljenosti od tijela) dovodi do velikih tangencijalnih naprezanja – otpora uslijed trenja.

Kao što je slika strujanja izvan graničnog sloja određena Machovim brojem, tako su značajke graničnog sloja određene Reynoldsovim brojem. Debljina graničnog sloja raste od nulte na prednjoj zaustavnoj točki do maksimalne na izlaznom bridu. Debljina graničnog sloja ovisi o lokalnoj vrijednosti Re broja. Promjena gradijenta tlaka (dp/dx) ima dominantan utjecaj na stabilnost graničnog sloja. Negativan gradijent tlaka ima stabilizirajući učinak, a porast tlaka ima destabilizirajući učinak. .



Porast Reynoldsovog broja pri konstatnom napadnom kutu uzrokuje pomicanje točke nestabilnosti i transformacije laminarnog u turbulentni granični sloj uzstrujno. Laminarni aeroprofili, npr. NACA 662-215, za razliku od klasičnih aeroprofila, npr. NACA 23015, imaju pomaknutu točku maksimalne debljine aeroprofila na položaj od 40 – 60 % tetive što osigurava i do 50% nižu vrijednost koeficijenta otpora pri projektnom koeficijentu uzgona.

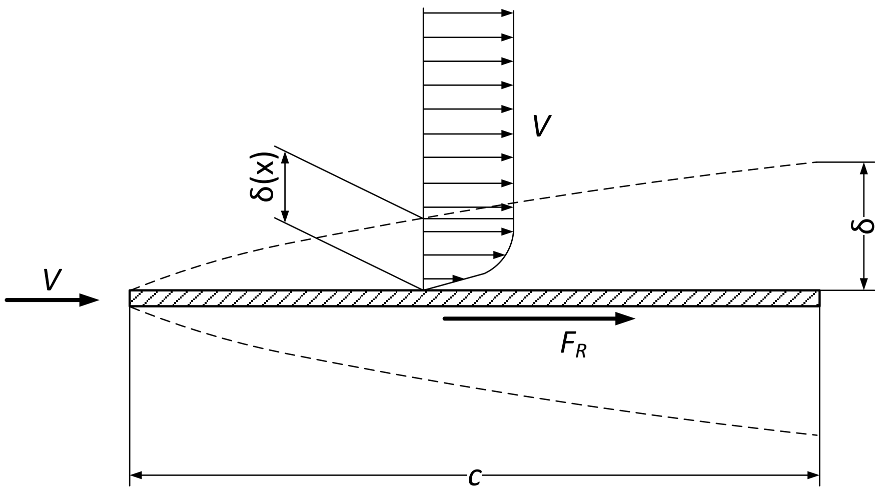


U trenutku kada d*p*/d*x* postane dovoljno velik da brzina u graničnom sloju bude toliko mala da više ne može strujati u pravcu nadolazeće struje zraka, počinje separacija struje zraka od površine aeroprofila.

8.1

Krilo zrakoplova može se promatrati kao ravna ploča širine 10 m i duljine tetive 1,2 m. Na krilo nastrujava zrak brzinom 300 km/h sa standardnim karakteristikama za visinu 3000 m. Odrediti silu otpora trenja, debljinu graničnog sloja na izlaznom bridu i potrebnu snagu za savladavanje sile otpora ako se pretpostavi da je:

- **a) granični sloj laminaran na cijelom krilu,**
- **b) granični sloj turbulentan na cijelom krilu,**
- **c) prijelaz laminarnog graničnog sloja u turbulentni događa se pri kritičnom Reynoldsovom broju Re_{kr} = 500 000.**



Rješenje:

$b = 10\ \mathrm{m}$

$c = 1{,}2\ \mathrm{m}$

$V = 300\ \mathrm{km/h} = 83{,}33\ \mathrm{m/s}$

$H = 3000\ \mathrm{m} \quad \rightarrow\ T = 268{,}65\ \mathrm{K}$

$\rho = 0{,}90896\ \ \mathrm{kg/m^3}$

$\mu = 1{,}696 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pas}$

$\nu = 1{,}8659 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$

$$Re = \frac{V \cdot \mathrm{c}}{\nu} = \frac{83{,}33 \cdot 1{,}2}{18{,}659 \cdot 10^{-6}} = 5{,}36 \cdot 10^{6}$$

a) $\bar{C}_{f\,l} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} = \frac{1.328}{\sqrt{5{,}36 \cdot 10^6}} = 5{,}736 \cdot\ 10^{-4}$

$$F_x = 2 \cdot \bar{C}_{f\,l} \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 b \cdot c = 2 \cdot 5{,}736 \cdot\ 10^{-4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}90896 \cdot 83{,}33^2 \cdot 10 \cdot 1{,}2 = 43{,}45\ \ \mathrm{N}$$

$$P = F_x \cdot V = 43{,}45 \cdot 83{,}33 = 3621\ \ \mathrm{W} \approx 3{,}6\ \ \mathrm{kW}$$

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu \cdot x}{V}} = 5\sqrt{\frac{18{,}659 \cdot 10^{-6} \cdot x}{83{,}33}} = 0{,}002366\sqrt{x}$$

$$x = c = 1{,}2\ \ \mathrm{m}\ \ \rightarrow\ \delta = 0{,}002366\sqrt{x} = 0{,}002366\sqrt{1{,}2} = 0{,}00259\ \ \mathrm{m} = 2{,}59\ \mathrm{mm}$$

b) $\bar{C}_{f\,t} = \frac{0{,}074}{Re^{0{,}2}} = \frac{0{,}074}{(5{,}36 \cdot 10^6)^{0{,}2}} = 0{,}003337$

$$F_x = 2 \cdot \bar{C}_{f\,t} \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 b \cdot c = 2 \cdot 0{,}003337 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}90896 \cdot 83{,}33^2 \cdot 10 \cdot 1{,}2 = 252{,}8\ \ \mathrm{N}$$

$$P = F_x \cdot V = 252{,}8 \cdot 83{,}33 = 21066\ \ \mathrm{W} \approx 21\ \ \mathrm{kW}$$

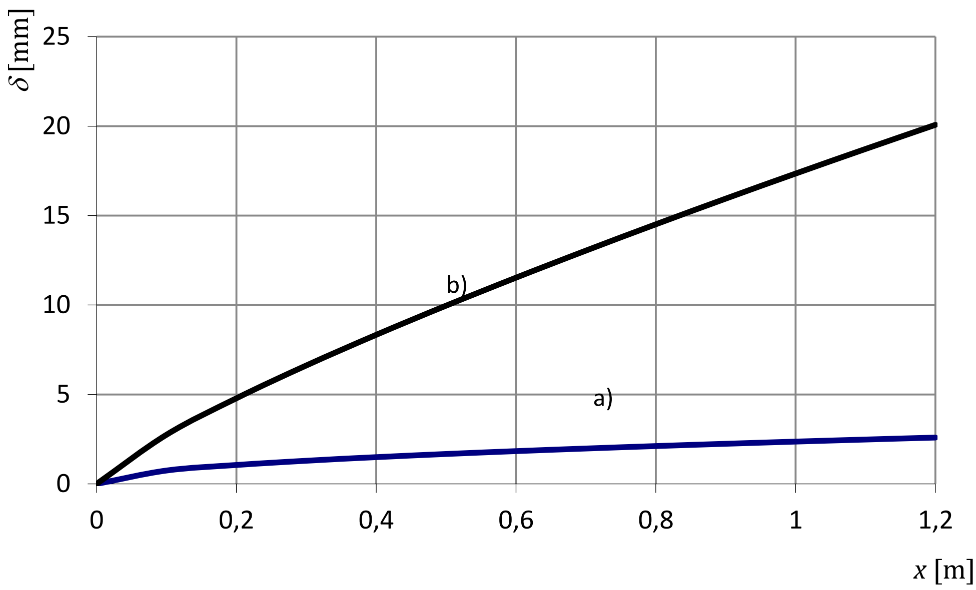
$$\delta = 0{,}371x\left(\frac{\nu}{V \cdot x}\right)^{0{,}2} = 0{,}371 \cdot \left(\frac{\nu}{V}\right)^{0{,}2} \cdot x^{0{,}8} = 0{,}371 \cdot \left(\frac{1{,}8659 \cdot 10^{-5}}{83{,}33}\right)^{0{,}2} \cdot x^{0{,}8} = 0{,}01735 \cdot x^{0{,}8}$$

$$x = c = 1{,}2\ \ \mathrm{m}\ \ \rightarrow\ \delta = 0{,}01735 \cdot x^{0{,}8} = 0{,}01735 \cdot 1{,}2^{0{,}8} = 0{,}0201\ \ \mathrm{m} = 20{,}1\ \mathrm{mm}$$

c) $\bar{C}_{f\,l-t} = \frac{0{,}074}{Re^{0{,}2}} - \frac{1700}{Re} = \frac{0{,}074}{(5{,}36 \cdot 10^6)^{0{,}2}} - \frac{1700}{5{,}36 \cdot 10^6} = 0{,}00302$

$$F_x = 2 \cdot \bar{C}_{f\,l-t} \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 b \cdot c = 2 \cdot 0{,}00302 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}90896 \cdot 83{,}33^2 \cdot 10 \cdot 1{,}2 = 228{,}77\ \ \mathrm{N}$$

$$P = F_x \cdot V = 228{,}77 \cdot 83{,}33 = 19064\ \ \mathrm{W} \approx 19\ \ \mathrm{kW}$$



Slika 8-1. Usporedba debljina laminarnog i turbulentnog graničnog sloja

Tablica 8-1. Usporedba graničnih slojeva

Granični sloj	C_f	F_x [N]	P [kW]	$\delta(c)$ [mm]
Laminaran	0,0005736	43,45	3,6	2,59
Turbulentan	0,003337	252,8	21	20,1
Laminarno – turbulentan	0,00302	228,87	19	20,1

8.2 **Zrakoplov leti brzinom 150 km/h na nadmorskoj visini 5000 m. Ako je površina donjake ravna, a duljina tetive 1000 mm i prijelaz iz laminarnog u turbulentni granični sloj kod *Re* = 2 000 000, odrediti:**

a) debljinu graničnog sloja na izlaznom rubu donjake,

b) silu trenja po jedinici širine krila (samo na donjaci).

Rješenje:

$H = 5000 \text{ m} \quad \rightarrow \; T = 255{,}65 \text{ K}$

$$\rho = 0{,}7359 \ \text{kg/m}^3$$

$$\mu = 16{,}28 \cdot 10^{-6} \text{ Pas}$$

$$\nu = 22{,}12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$c = 1000 \text{ mm} = 1 \text{ m}$

$V = 150 \text{ km/h} = 41{,}67 \text{ m/s}$

$Re = 2\ 000\ 000$

$$Re = \frac{\rho V x}{\mu} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\mu \cdot Re}{\rho V} = \frac{16{,}28 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{6}}{0{,}7359 \cdot 41{,}67} = 1{,}063 \ \text{ m}$$

$x > c \quad \rightarrow$ laminaran granični sloj

$$\delta = 5\sqrt{\frac{\nu \cdot c}{V}} = 5\sqrt{\frac{22{,}12 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{41{,}67}} = 3{,}64 \text{ mm}$$

$$\bar{C}_{f\,l} = 1{,}328\sqrt{\frac{\nu}{Vc}} = 1{,}328\sqrt{\frac{22{,}12 \cdot 10^{-6}}{41{,}67 \cdot 1}} = 9{,}67 \cdot \ 10^{-4}$$

$$F_x = \bar{C}_{f\,l} \cdot \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot S = 9{,}67 \cdot \ 10^{-4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}7359 \cdot 41{,}67^2 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}62 \ \text{ N}$$

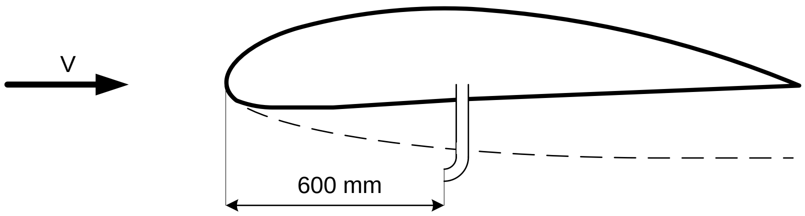
Zrakoplov leti na visini h = 4000 m brzinom od 400 km/h. Odredi:

a) pokazivanje Pitot-Prandtlove cijevi ako je ona postavljena s donje strane krila izvan graničnog sloja

b) koliko cjevčica mora stršiti ispod krila tako da horizontalni dio cijevi bude izvan graničnog sloja ako se nalazi na udaljenosti 600 mm od napadnog brida.

Rješenje:

$V = 400\ \mathrm{km/h} = 111{,}1\ \mathrm{m/s}$



$$h\ =\ 4\,000\ \mathrm{m} \quad \rightarrow\ T\ =\ T_0 - \frac{6{,}5}{1000}\cdot h = 288{,}15 - \frac{6{,}5}{1000}\cdot 4000 = 262{,}15\ \ \mathrm{K}$$

$$\rho = \rho_n(1 - 2{,}257\cdot 10^{-5}\cdot h)^{4{,}256} = 1{,}225(1 - 2{,}257\cdot 10^{-5}\cdot 4000)^{4{,}256} = 0{,}8189\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$p = p_n(1 - 2{,}257\cdot 10^{-5}\cdot h)^{5{,}256} = 101325(1 - 2{,}257\cdot 10^{-5}\cdot 4000)^{5{,}256} = 61\,621\ \ \mathrm{Pa}$$

a) $p_z = p + \frac{1}{2}\rho V^2 = 61621 + \frac{1}{2}0{,}8189\cdot 111{,}1^2 = 66\,676\ \ \mathrm{Pa}$

b) $\mu =\ 2{,}417\cdot 10^{-7}\cdot T^{0{,}76} = 2{,}417\cdot 10^{-7}\cdot 262{,}15^{0{,}76} = 16{,}65\cdot 10^{-6}\ \mathrm{Pas}$

$$Re = \frac{\rho V \ell}{\mu} = \frac{0{,}8189\cdot 111{,}1\cdot 0{,}6}{16{,}65\cdot 10^{-6}} = 3\,278\,551 \quad \rightarrow \text{granični sloj je turbulentan}$$

$$\delta = \frac{0{,}371\cdot x}{Re^{1/5}} = \frac{0{,}371\cdot 0{,}6}{3\,278\,551^{1/5}} = 0{,}01108\ \ \mathrm{m} = 11{,}08\ \ \mathrm{mm}$$

8.4 **Zrakoplov mase 2000 kg s pravokutnim krilima iz aeroprofila NACA 2418 (dan na str. 102) raspona 10 m i duljine tetive 1,25 m leti brzinom 360 km/h na visini 2000 m. Otpor trupa ekvivalentan je otporu ravne ploče površine 0,2 m² s C_{x_p} = 1. Odredi:**

a) ukupnu silu otpora i

b) potrebnu snagu motora.

Rješenje:

$$h = 2\,000\ \mathrm{m} \quad \rightarrow \quad T = T_0 - \frac{6{,}5}{1000} \cdot h = 288{,}15 - \frac{6{,}5}{1000} \cdot 2000 = 275{,}15\ \ \mathrm{K}$$

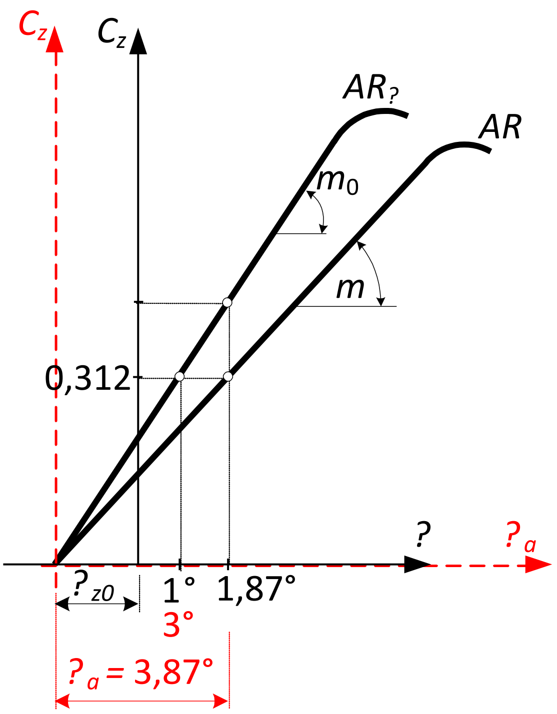
$$\rho = \rho_n (1 - 2{,}257 \cdot 10^{-5} \cdot h)^{4{,}256} = 1{,}225(1 - 2{,}257 \cdot 10^{-5} \cdot 2000)^{4{,}256} = 1{,}0065\ \ \mathrm{kg/m^3}$$

$$p = p_n (1 - 2{,}257 \cdot 10^{-5} \cdot h)^{5{,}256} = 101325(1 - 2{,}257 \cdot 10^{-5} \cdot 2000)^{5{,}256} = 79\,494\ \ \mathrm{Pa}$$

$$A = b \cdot c = 10 \cdot 1{,}25 = 12{,}5\ \mathrm{m^2} \qquad AR = \frac{b^2}{A} = \frac{10^2}{12{,}5} = 8 \ \Longrightarrow\ \delta = 0{,}064$$

$$F_z = F_G$$

$$C_z \frac{1}{2} \rho V^2 A = mg \ \Longrightarrow\ C_z = \frac{2mg}{\rho V^2 A} = \frac{2 \cdot 2000 \cdot 9{,}81}{1{,}0065 \cdot \left(\frac{360}{3{,}6}\right)^2 \cdot 12{,}5} = 0{,}312$$



$$\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{C_z}{\pi}\left(\frac{1+\tau_1}{AR_1} - \frac{1+\tau_2}{AR_2}\right)$$

$$c_z = C_z = 0{,}312 \ \rightarrow\ \alpha_2 = 1° \qquad \text{...iz dijagrama}$$

$$AR_1 = 8 \ \rightarrow\ \tau_1 = 0{,}22$$

$$AR_2 = \infty$$

$$\alpha_1 = 1 \cdot \frac{\pi}{180} + \frac{0{,}312}{\pi}\left(\frac{1+0{,}22}{8}\right) = 0{,}0326\ \mathrm{rad}$$

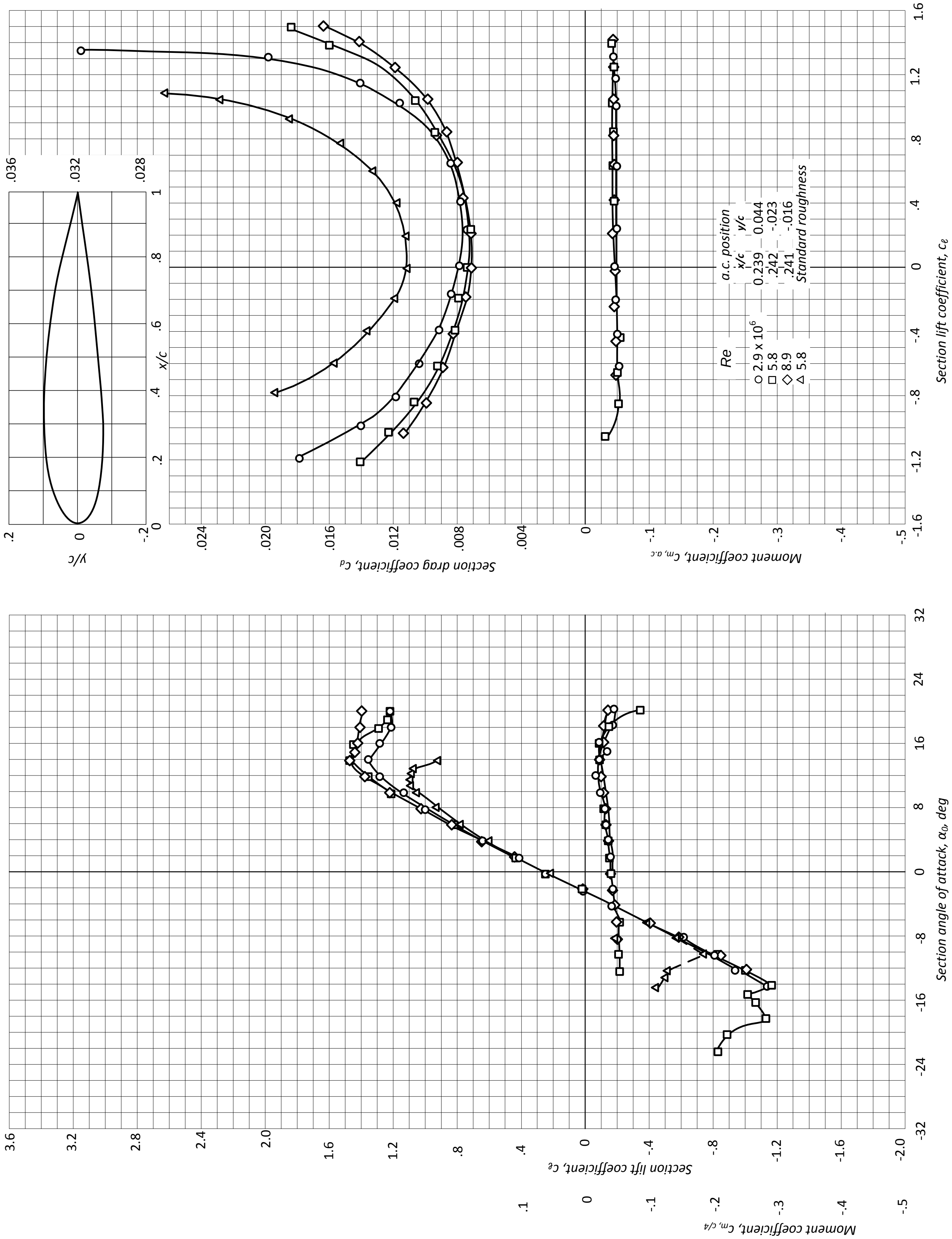
$$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR}(1+\delta) = \frac{0{,}312^2}{\pi \cdot 8}(1 + 0{,}064) = 0{,}00412$$

a) $F_{x_{uk}} = F_{x_a} + F_{x_i} + F_{x_p} = \frac{1}{2}\rho V^2 \left(c_{x_a}A + C_{x_i}A + C_{x_p}A_p\right)$

$$F_{x_{uk}} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0065 \cdot \left(\frac{360}{3{,}6}\right)^2 \cdot (0{,}0075 \cdot 12{,}5 + 0{,}00412 \cdot 12{,}5 + 1 \cdot 0{,}2) = 1737.5 \ \text{N}$$

b) $P = F_{x_{uk}} \cdot V = 1737.5 \cdot \left(\frac{360}{3{,}6}\right) = 173\,750 \ \ \text{W} = 173.75 \ \text{kW}$

NACA 2418


Section lift coefficient, cℓ
Section drag coefficient, cd
Moment coefficient, cm, a.c.
Section angle of attack, α0, deg
Moment coefficient, cm, c/4
x/c
y/c
Re
○ 2.9 x 10^6
□ 5.8
◇ 8.9
△ 5.8
a.c. position
x/c y/c
0.239 0.044
.242 -.023
.241 -.016
Standard roughness

8.5

Avion mase 17000 kg ima eliptična krila iz aeroprofila NACA 2421 (str. 105), površine 75 m^2 i raspona 24,5 m. Leti u uvjetima ISA na visini 3000 m brzinom 103 m/s. Svi štetni otpori predstavljeni su otporom ravne ploče površine 0,19 m^2 s C_{x_p} = 1. Odredi:

- **a) koeficijent uzgona aviona,**
- **b) napadni kut na kojem avion leti,**
- **c) inducirani otpor aviona**
- **d) ukupni otpor letu aviona i**
- **e) potrebnu snagu aviona za let.**

Rješenje:

a) $h = 3000 \text{ m}$

$$\rho = \rho_n(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot h)^{4{,}256} = 1{,}225(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 3000)^{4{,}256} = 0{,}9091 \ \text{kg/m}^3$$

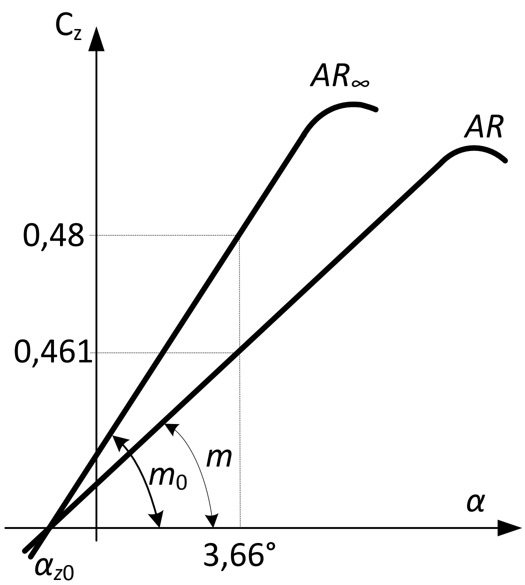
$$F_z = F_G$$

$$C_z \frac{1}{2}\rho V^2 A = mg \qquad \Longrightarrow \qquad C_z = \frac{2mg}{\rho V^2 A} = \frac{2 \cdot 17000 \cdot 9{,}81}{0{,}9091 \cdot 103^2 \cdot 75} = 0{,}461$$

b) $\alpha_{z0} = -2°$

$$\alpha_a = \alpha - \alpha_{z0} = \alpha + |\alpha_{z0}|$$

$$AR = \frac{b^2}{A} = \frac{24{,}5^2}{75} = 8$$



$$m_0\text{:} \quad \alpha = 6° \ \Longrightarrow \ \alpha_a = 6 + 2 = 8° \ \Longrightarrow \ c_z = 0{,}8$$

$$m_0 = \frac{\Delta c_z}{\alpha_a} = \frac{0{,}8}{8 \cdot \frac{\pi}{180}} = 5{,}730 \quad \text{rad}^{-1}$$

$$m = \frac{m_0}{1 + \frac{m_0}{\pi AR}} = \frac{5{,}730}{1 + \frac{5{,}730}{\pi \cdot 8}} = 4{,}666 \ \ \text{rad}^{-1}$$

$$\alpha_a = \frac{C_z}{m} = \frac{0{,}461}{4{,}666} = 0{,}0988 \ \ \text{rad} \ \ \rightarrow \ \ \alpha_a = 5{,}66\,°$$

$$\alpha = \alpha_a + \alpha_{z0} = 5{,}66 - 2 = 3{,}66°$$

c) $C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR} = \frac{0{,}461^2}{\pi \cdot 8} = 0{,}008456$

$$F_{xi} = C_{xi}\frac{1}{2}\rho V^2 A = 0{,}008456 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}9091 \cdot 103^2 \cdot 75 = 3058 \text{ N}$$

d) $\alpha = 3{,}66° \implies c_z = 0{,}48 \implies c_x = 0{,}0078$ ... iz dijagrama aeroprofila

$$F_{x_a} = c_x\frac{1}{2}\rho V^2 A = 0{,}0078 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}9091 \cdot 103^2 \cdot 75 = 2821 \text{ N}$$

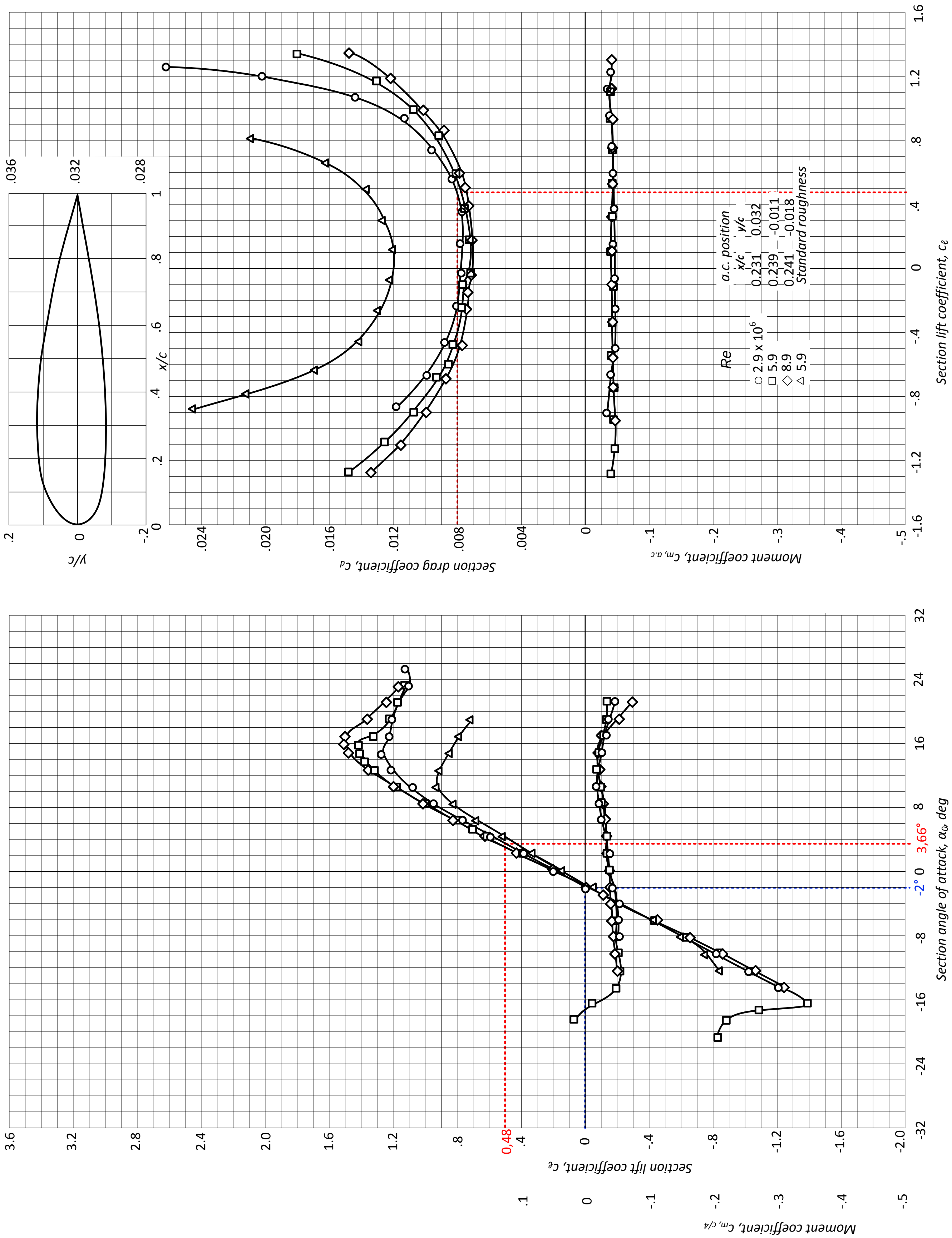
$$F_{x_p} = C_{xp}\frac{1}{2}\rho V^2 A_p = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}9091 \cdot 103^2 \cdot 0{,}19 = 916 \text{ N}$$

$$C_{x_{uk}} = c_x + C_{xi} + C_{xp}\frac{A_p}{A} = 0{,}0078 + 0{,}008456 + 1 \cdot \frac{0{,}19}{75} = 0{,}01879$$

$$F_{x_{uk}} = C_{x_{uk}}\frac{1}{2}\rho V^2 A = 0{,}01879 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}9091 \cdot 103^2 \cdot 75 = 6796 \text{ N}$$

e) $P_R = F_{x_{uk}} V = 6796 \cdot 103 = 700 \text{ kW}$

NACA 2421


Section lift coefficient, c_ℓ
Section drag coefficient, c_d
Moment coefficient, $c_{m,a.c}$
Section angle of attack, α_0, deg
Moment coefficient, $c_{m,c/4}$
x/c
y/c
Re
○ 2.9 x 10^6
□ 5.9
◇ 8.9
△ 5.9
a.c. position
x/c y/c
0.231 0.032
0.239 -0.011
0.241 -0.018
Standard roughness
0,48
3,66°
-2°

8.6 **Odredi i grafički prikaži ovisnost pozicije točke transformacije laminarnog u turbulentni granični sloj za strujanje preko ravne ploče duljine 2 m, u uvjetima ISA/SL, za brzine od 5 do 50 m/s s korakom od 1 m/s. Odredi i grafički prikaži ovisnost koeficijenta otpora uslijed trenja o Reynoldsovom broju za isti raspon brzina.**

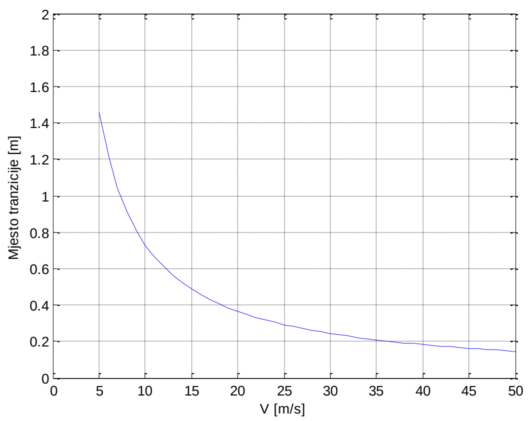
Rješenje:

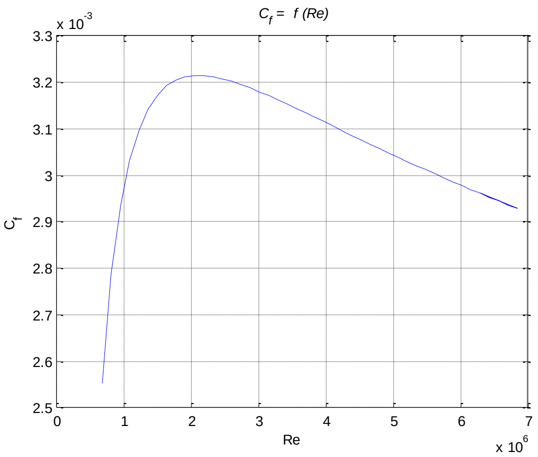
$$Re = \frac{\rho V x}{\mu} \quad \Longrightarrow \quad x_{tr} = \frac{\mu \cdot Re}{\rho V} = \frac{1{,}7894 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{5}}{1{,}225 \cdot V} = \frac{7{,}304}{V} \quad \mathrm{m}$$

$$\bar{C}_{f\,l} = \frac{1{,}328}{\sqrt{Re}} \qquad \text{za } Re < 500\,000 \qquad \text{... koeficijent otpora za laminarno strujanje}$$

$$\bar{C}_{f\,lt} = \frac{0{,}074}{Re^{0{,}2}} - \frac{1700}{Re} \quad \text{za } Re > 500\,000 \quad \text{... koeficijent otpora u slučaju lam.-turb. strujanja}$$

```
%% Ovisnost pozicije točke tranzicije lam. u turb. gr. sloj preko ravne ploče
% duljine 2 m,u uvjetima ISA/SL za brzine od 5 do 50 m/s s korakom od 1 m/s.
c=2; %[m]
ro=1.225;%[kg/m^3]
ni=1.7894*10^(-5);%[Pas]
V=5:50;%[m/s]
Re_krit=500000;
x_krit=ni*Re_krit./(ro*V);
figure(1)
plot (V,x_krit); grid on
xlabel('V [m/s]');ylabel('Mjesto tranzicije [m]')
axis([0,50,0,2])
for i=1:length(V)
    Re(i)=ro*V(i)*c/ni;
    if Re(i)>Re_krit
        Cf(i)=0.074/Re(i)^0.2-1700/Re(i); % laminarno-turbulentni
    else
        Cf(i)=1.328/sqrt(Re(i)); %laminarni
    end
end
% crtanje ovisnosti Cf=f(Re)za isti raspon brzina
figure(2)
plot (Re,Cf); grid on
xlabel('Re');ylabel('C_f');title('\it {C_f} = \it {f} (\it{Re})')
```

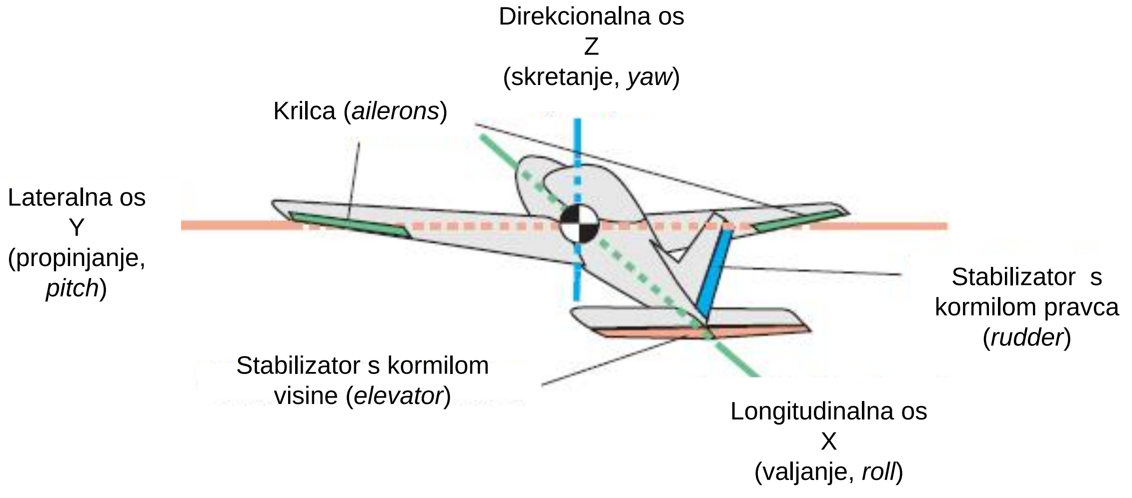




9 UPRAVLJAČKE POVRŠINE

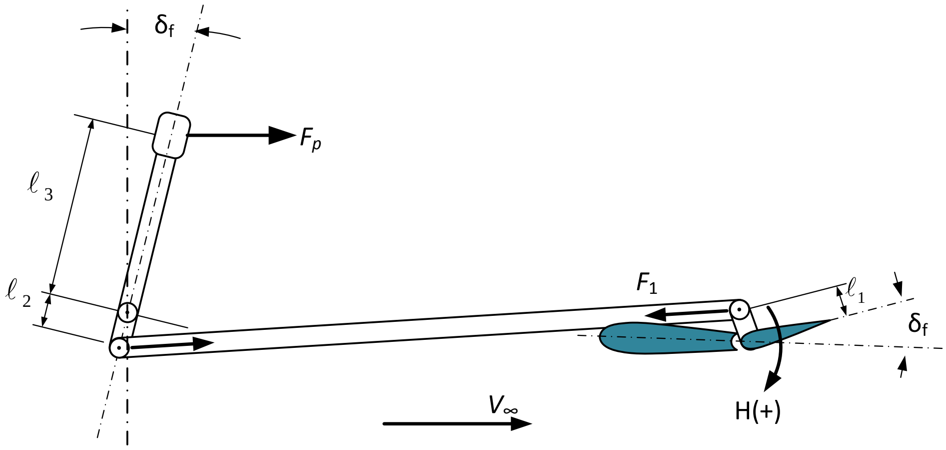
Kada se promatra gibanje zrakoplova, bitni pojmovi su: stabilnost i upravljivost.

Stabilnost zrakoplova je njegovo svojstvo da se nakon djelovanja poremećaja samostalno vrati u početni ravnotežni položaj, a promatra se kao statička i dinamička. Upravljivost zrakoplova je njegova sposobnost stvaranja željenog gibanja djelovanjem na upravljačke površine. Stabilnost i upravljivost su oprečni pojmovi; što je zrakoplov stabilniji, manje je upravljiv i obrnuto. Zrakoplov se može promatrati kao kruto tijelo sa šest stupnjeva slobode gibanja: tri translacije i tri rotacije. Upravljanje rotacijom zrakoplova vrši se pomoću upravljačkih površina. U tablici su navedene upravljačke površine klasičnog aviona kao i odgovarajuće komande u kokpitu.

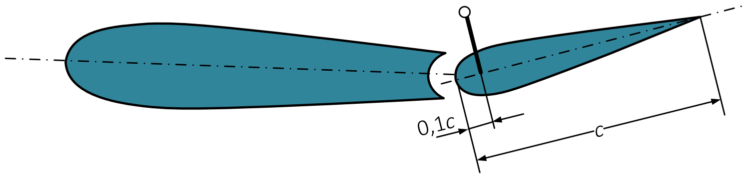


Upravljačka komanda u kokpitu	Upravljačka površina	Gibanje
upravljačka palica (desno i lijevo)	krilca (*ailerons*)	valjanje (*roll*)
upravljačka palica (naprijed i natrag)	kormilo visine (*elevators*)	propinjanje (*pitch*)
pedale	kormilo pravca (*rudder*)	skretanje (*yaw*)

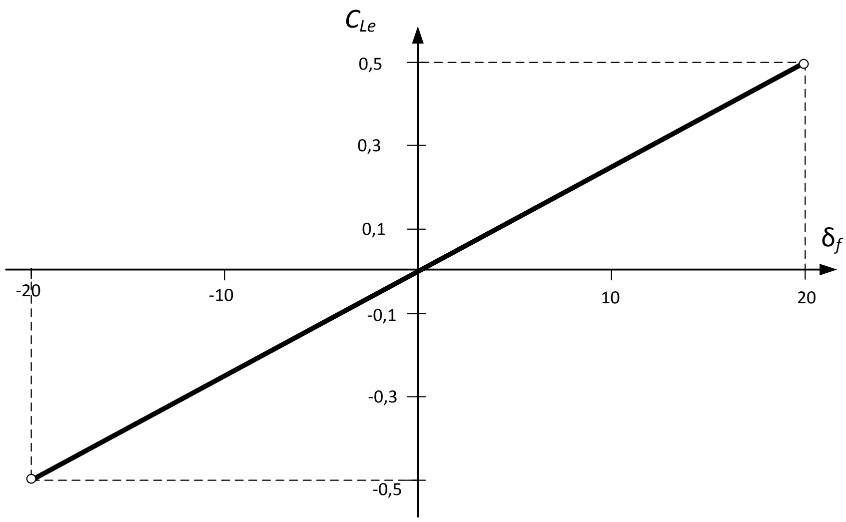
9.1 **Odredi silu na upravljač aviona pri brzini 60 m/s u uvjetima ISA/SL, ako se elevator zakreće od δ_f = - 20° do +20°. Sila uzgona na elevatoru djeluje u aerodinamičkom centru elevatora, a otpor se može zanemariti. Duljine poluga su: ℓ_1= 0,05 m, $\ell_2 = 0.1$ m i $\ell_3 = 0{,}6$ m. Ovisnost koeficijenta uzgona elevatora o otklonu elevatora dana je u dijagramu. Površina elevatora je A = 0,8 m^2, a dužina tetive elevatora c = 0,4 m.**



Slika 9-1. Shema prijenosa djelovanja od upravljačke poluge do upravljačke površine pri propinjanju



Slika 9-2. Uvećani prikaz položaja zgloba na elevatoru



Dijagram 9-1. Ovisnost koeficijenta uzgona o otklonu elevatora

Rješenje:

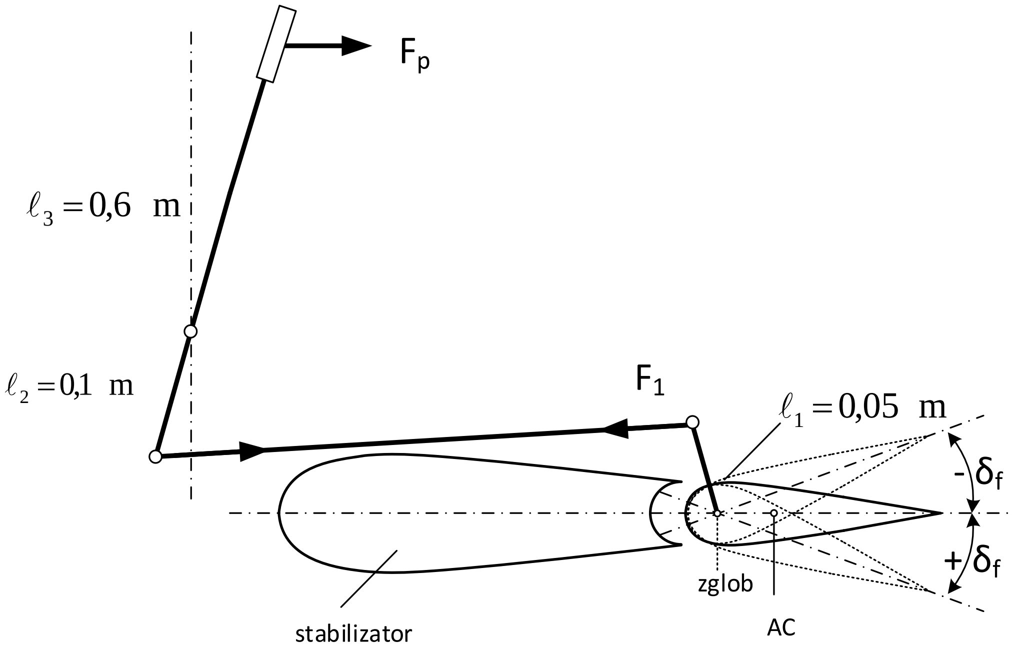
$A = 0{,}8\ \mathrm{m}^2$

$c = 0{,}4\ \mathrm{m}$

$V = 60\ \mathrm{m/s}$

$X_{ac} = 0{,}25c$

$X_{zgl} = 0{,}1c$



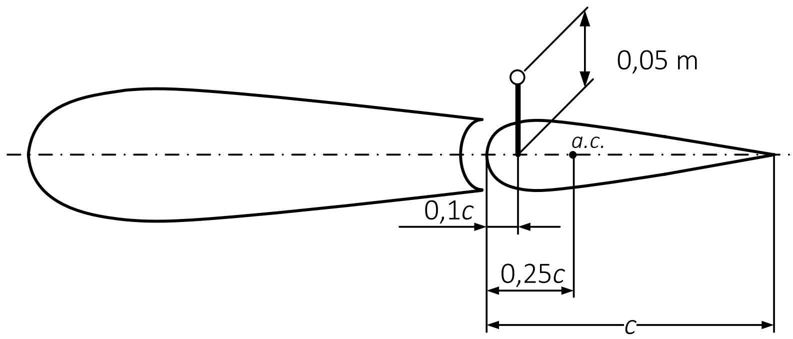
$$F_{Le} = C_{Le}\frac{1}{2}\rho V^2 A \qquad (1)$$

$$H = F_{Le}(X_{ac} - X_{zgl}) \qquad (2)$$

$$F_1 = \frac{H}{\ell_1} \qquad (3)$$

$$F_1\ell_2 = F_P\ell_3$$

$$F_P = F_1\frac{\ell_2}{\ell_3} \qquad (4)$$

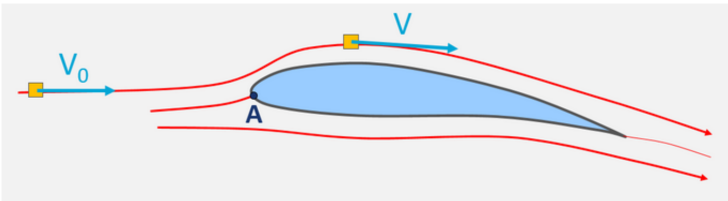


Tablica 9-1. Potrebna sila na upravljačkoj palici za različite otklone elevatora

d_f [°]	C_{Le} [N]	F_{Le} [N] (1)	H [Nm] (2)	F_1 [N] (3)	F_P [N] (4)
-20	-0,500	-882,0	-52,9	-529,2	-88,2
-15	-0,375	-661,5	-39,7	-396,9	-66,2
-10	-0,250	-441,0	-26,5	-264,6	-44,1
-5	-0,125	-220,5	-13,2	-132,3	-22,1
0	0	0	0	0	0
5	0,125	220,5	13,2	132,3	22,1
10	0,250	441,0	26,5	264,6	44,1
15	0,375	661,5	39,7	396,9	66,2
20	0,500	882,0	52,9	529,2	88,2

10 AERODINAMIKA VELIKIH BRZINA

Kritični Machov broj slobodne struje zraka postiže se pri brzini leta zrakoplova koja negdje iznad aeroprofila dovodi do lokalne brzine stujanja zraka koja je jednaka lokalnoj brzini širenja zvuka.



Odnosno ako negdje iznad aeroprofila lokalna brzina strujanja zraka postigne lokalnu brzinu širenja zvuka, Ma = 1, kaže se da zrakoplov leti kritičnim Machovim brojem. Kritični Machov broj uvijek je manji od jedinice, a njegova vrijednost ovisi o obliku aeroprofila i napadnom kutu. Određivanje kritične brzine leta ili kritičnog Machovog broja iznimno je bitno jer let iznad te brzine uzrokuje veliki otpor strujanju zraka kao i mogućnost odvajanja struje graničnog sloja uslijed udarnih valova.

Kritični Machov broj moguće je odrediti za svaki aeroprofil pomoću dvije jednadžbe ako je poznata ovisnost koeficijenta tlaka o položaju točke na aeroprofilu. Obično je poznat koliki je $Cp_{\mathrm{nst,min}}$ koji se zatim uz pomoć Prandtl-Glauertove korekcije može preračunati i za stlačivo strujanje prema jednadžbi:

$$C_p = \frac{C_{p\,\mathrm{nst,min}}}{\sqrt{1 - Ma^2}} \tag{1}$$

$$C_{p_{kr}} = \frac{2}{\kappa \cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2 + (\kappa - 1)\cdot Ma_{kr}^2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1\right] \tag{2}$$

Uz jednadžbu (1) i (2) moguće je grafičkom ili numeričkom metodom izračunati kritičnu vrijednost Machovog broja, odnosno vrijednost Ma broja slobodne struje (brzine leta) kada se iznad aeroprofila prvi put pojavljuje brzina fluida koja je jednaka lokalnoj brzini zvuka.

10.1 **Najmanji koeficijent tlaka aeroprofila za slučaj nestlačivog strujanja iznosi -0,8. Odredi:**

a) kritični Machov broj aeroprofila, grafički i numerički

b) povećanje koeficijenta uzgona u odnosu na nestlačivo strujanje pri kritičnom Machovom broju

Rješenje:

a) Kritični Machov broj aeroprofila

a1. Grafičko rješenje

$$C_{p0} = -0{,}8$$

$$C_p = \frac{C_{p0}}{\sqrt{1-Ma^2}} = \frac{-0{,}8}{\sqrt{1-Ma^2}}$$

$$Ma_{kr} \rightarrow C_{p_{kr}} \quad \Rightarrow \quad C_{p_{kr}} = \frac{-0{,}8}{\sqrt{1-Ma_{kr}^2}} \qquad (1) \qquad \text{Prandtl – Glauertovo pravilo}$$

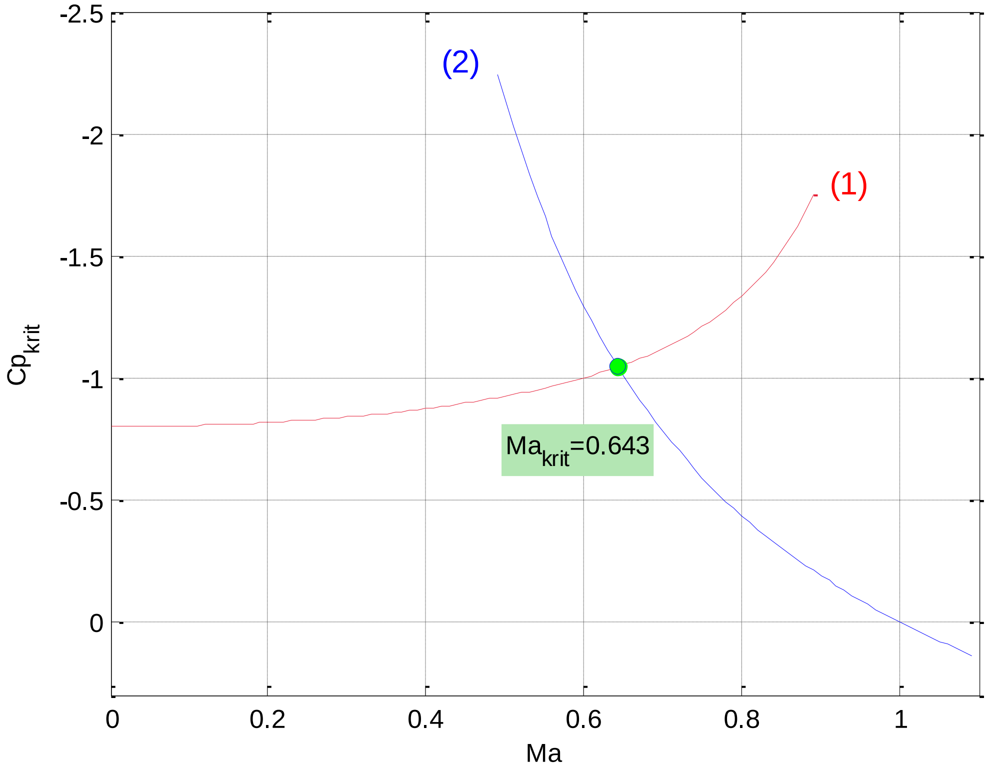
$$C_{p_{kr}} = \frac{2}{\kappa \cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+(\kappa-1)\cdot Ma_{kr}^2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1\right] \qquad (2)$$

$$C_{p_{kr}} = \frac{2}{1{,}4Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+(1{,}4-1)\cdot Ma_{kr}^2}{1{,}4+1}\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} - 1\right] = \frac{1}{0{,}7Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+0{,}4Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5} - 1\right]$$

$$C_{p_{kr}} = \frac{1}{0{,}7\cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+0{,}4\cdot Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5} - 1\right] \qquad (2^*)$$

$\boldsymbol{Ma_{kr}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$\boldsymbol{C_{p_{kr}}}$ **iz (1)**	-0,8	-0,816	-0,873	-1	-1,333	-∞	-∞
$\boldsymbol{C_{p_{kr}}}$ **iz (2*)**	-∞	-16,313	-3,662	-1,294	-0,435	0	0,279

$Ma_{kr} = 0{,}643$ ... očitano iz grafa



a2. Numeričko rješenje

$$\frac{-0{,}8}{\sqrt{1-Ma_{kr}^2}}=\frac{1}{0{,}7\cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2+0{,}4\cdot Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5}-1\right]$$

$$Ma_{kr}=\sqrt{-\frac{\sqrt{1-Ma_{kr}^2}}{0{,}56}\left[\left(\frac{2+0{,}4\cdot Ma_{kr}^2}{2{,}4}\right)^{3{,}5}-1\right]}$$

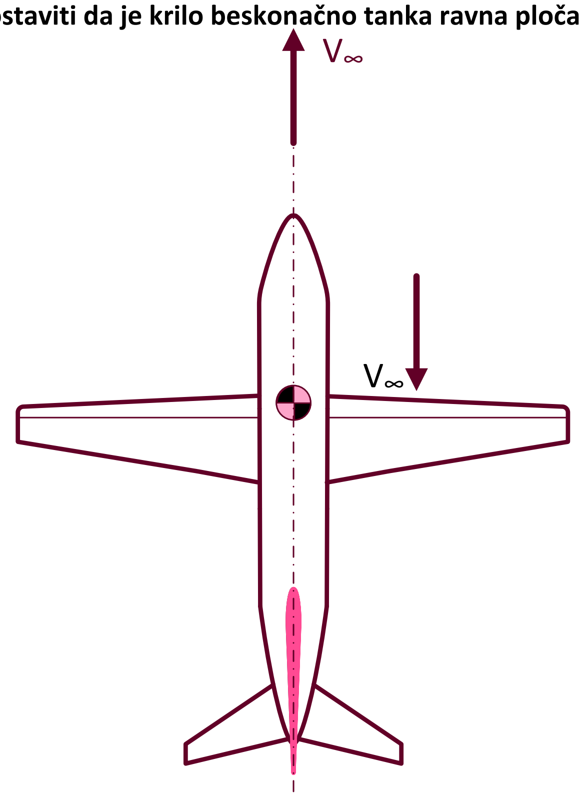
i	Ma_{kr_i}	$Ma_{kr_{i+1}}$
1	0,8	0,4568
2	0,4568	0,7876
3	0,7876	0,4744
4	0,4744	0,7766
...	0,64	0,64595
	0,64596	0,64018
	0,642	0,644
	0,643	0,643

→ vrlo sporo konvergira

b) $C_z=\dfrac{C_{z0}}{\sqrt{1-Ma_{kr}^2}}=\dfrac{C_{z0}}{\sqrt{1-0{,}643^2}}=1{,}306\cdot C_{z0}$

$$\frac{C_z-C_{z0}}{C_{z0}}=\frac{1{,}306\cdot C_{z0}-C_{z0}}{C_{z0}}=0{,}306=30{,}6\ \%$$

10.2 **Usporedi brzine za tri različita zrakoplova (bez kuta strijele, kut strijele 15° i kut strijele 45°) pri kojima opstrujavanje krila dostiže kritični Machov broj. Pretpostaviti da je krilo beskonačno tanka ravna ploča.**



Rješenje:

$$a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}04 \cdot 288{,}15} = 340{,}3 \text{ m/s}$$

$$Ma_{kr} = 1$$

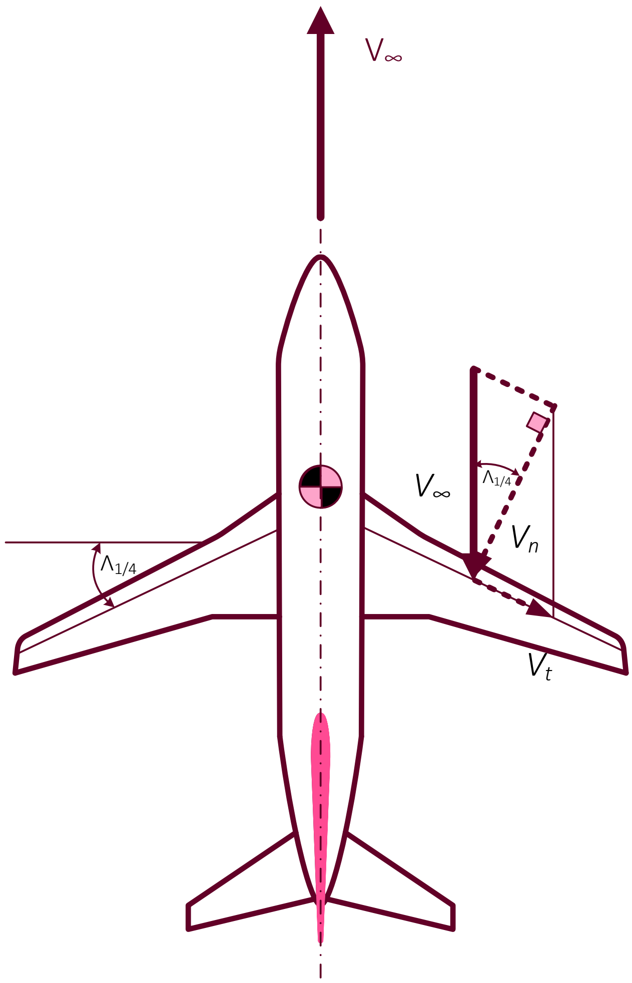
$$V_{kr} = Ma_{kr} \cdot a = 340{,}3 \text{ m/s}$$

$$V_{\infty kr} = 340{,}3 \text{ m/s}$$

$$V_n = V_\infty \cos \Lambda_{\text{LE}}$$

$$Ma_{kr} = \frac{V_{n\,kr}}{a} = \frac{V_{\infty kr} \cos \Lambda_{\text{LE}}}{a}$$

$$V_{\infty kr} = \frac{Ma_{kr} \cdot a}{\cos \Lambda_{\text{LE}}} = \frac{1 \cdot a}{\cos \Lambda_{\text{LE}}} = \frac{a}{\cos \Lambda_{\text{LE}}}$$



$$\boxed{\Lambda_{\text{LE}} = 15^\circ}$$

$$V_{\infty kr} = \frac{340{,}3}{\cos 15^\circ} = 352{,}3 \text{ m/s}$$

$$Ma_{kr} = \frac{V_{\infty kr}}{a} = \frac{352{,}3}{340{,}3} = 1{,}035$$

$$\boxed{\Lambda_{\text{LE}} = 45^\circ}$$

$$V_{\infty kr} = \frac{340{,}3}{\cos 45^\circ} = 481{,}2 \text{ m/s}$$

$$Ma_{kr} = \frac{V_{\infty kr}}{a} = \frac{481{,}2}{340{,}3} = 1{,}414$$

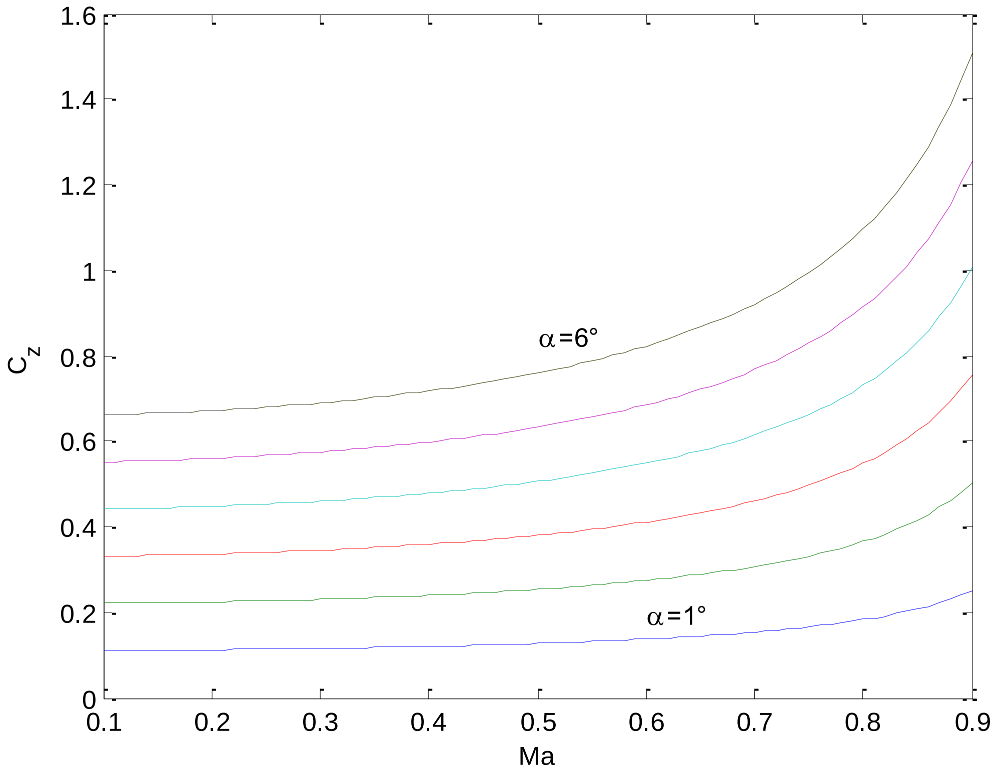
Teoretski koeficijent uzgona za tanki simetrični aeroprofil u nestlačivom strujanju iznosi $C_{z0} = 2\pi\alpha$. Izračunaj koeficijent uzgona za Machove brojeve 0,1, 0,3, 0,5, 0,7 i 0,9. **10.3**

Rješenje:

$$C_{z0} = 2\pi\alpha = 6{,}283\alpha$$

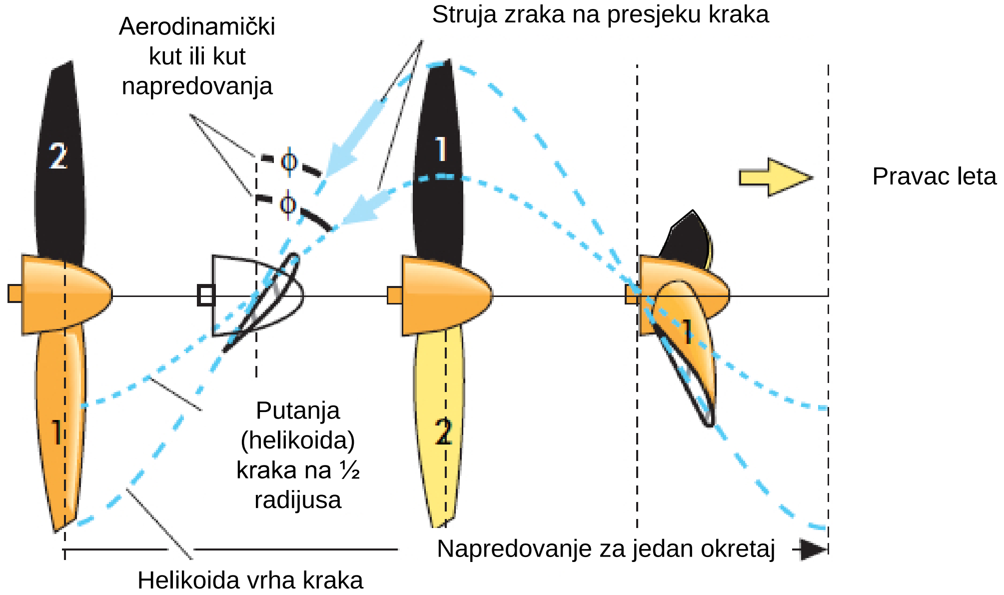
$$C_z = \frac{C_{z0}}{\sqrt{1 - Ma^2}} = \frac{6{,}283 \cdot \alpha}{\sqrt{1 - Ma^2}}$$

$\boldsymbol{Ma}$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\boldsymbol{C_z}$	$6{,}315\alpha$	$6{,}587\alpha$	$7{,}255\alpha$	$8{,}798\alpha$	$14{,}415\alpha$

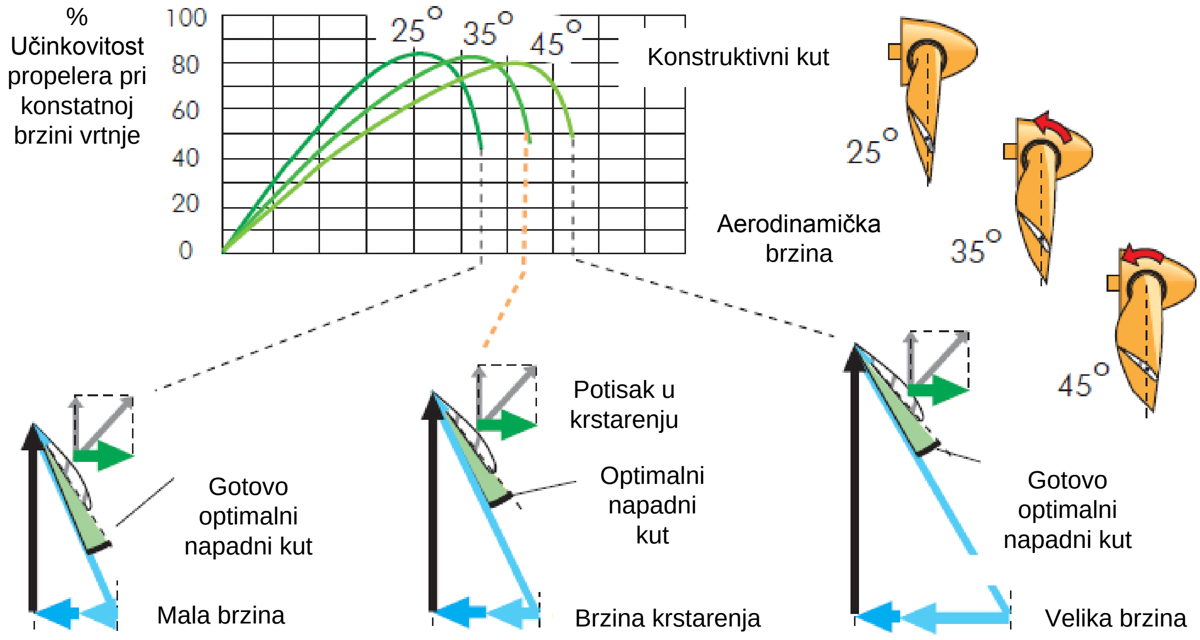


11 PROPELERI

Propeler služi kako bi snagu pogonskog motora pretvorio u potisak zrakoplova. Za razliku od krila čija je putanja ravna linija tijekom horizontalnog leta, propeler ima putanju helikoide, odnosno svaki presjek kraka ima svoju helikoidu i svoju lokalnu brzinu opstrujavanja. Kut između ravnine rotacije i pravca rezultantne brzine opstrujavanja naziva se aerodinamički kut (*advance angle, helix angle*) a drukčiji je od presjeka do presjeka kraka. Vrhovi propelera gibaju se po helikoidi puno većeg promjera, kao i pri puno većoj brzini od dijelova bliže glavčini. Kut između ravnine rotacije i kuta nultog uzgona aeroprofila na presjeku naziva se konstruktivni kut (*pitch angle, blade angle*).



Razlika između konstruktivnog (β) i aerodinamičkog kuta (ϕ) je apsolutni napadni kut (α_a). Kada zrakoplov leti malom brzinom, konstruktivni kut bi trebao biti manji (*low or fine pitch*). Kada zrakoplov leti većim brzinama, konstruktivni kut bi mu trebao biti veći (*high or course*). Konstruktivni kut β se razlikuje od vrha do glavčine propelera pa se u Pilotskom priručniku koristi referentni konstruktivni kut na 75% radijusa propelera. Učinkovitost propelera pokazuje koliku snagu motora pretvara u vučnu silu ili raspoloživu snagu. Najveća iskoristivost propelera postiže se kada je napadni kut po čitavoj dužini radijusa propelera optimalan. Na slici je prikazan propeler sa prilagodljivim korakom. Pilot može mijenjati konstruktivni kut propelera kako bi osigurao maksimalnu učinkovitost pri različitim brzinama leta.


%
Učinkovitost propelera pri konstatnoj brzini vrtnje
100
80
60
40
20
0
25°
35°
45°
Konstruktivni kut
Aerodinamička brzina
25°
35°
45°
Potisak u krstarenju
Gotovo optimalni napadni kut
Optimalni napadni kut
Gotovo optimalni napadni kut
Mala brzina
Brzina krstarenja
Velika brzina

Propeler mora razvijati potrebnu vučnu silu od F_v = 5000 N kod brzine od 120 m/s na razini mora. Ako je promjer propelera 2,4 m odredi minimalnu snagu motora prema Froudeovoj teoriji. **11.1**

Rješenje:

$$F_v = \rho A_p \left(V + \frac{\Delta V_u}{2}\right) \Delta V_u = \rho A_p V \left(1 + \frac{\Delta V_u}{2V}\right) \Delta V_u = \rho A_p V^2 \cdot 2 \left(1 + \frac{\Delta V_u}{2V}\right) \frac{\Delta V_u}{2V}$$

$$\boxed{a = \frac{\Delta V_u}{2V}}$$

$$F_v = \rho A_p V^2 \cdot 2a(1 + a)$$

$$\frac{F_v}{2\rho V^2 A_p} = a^2 + a \quad \Longrightarrow \quad a^2 + a - \frac{F_v}{2\rho V^2 A_p} = 0$$

$$a^2 + a - \frac{5000}{2 \cdot 1{,}225 \cdot 120^2 \cdot \frac{2{,}4^2 \cdot \pi}{4}} = 0$$

$$a^2 + a - 0{,}03133 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 0{,}1253}}{2} = \frac{-1 \pm 1{,}0608}{2}$$

$$a_1 = 0{,}0304 \qquad\qquad a_2 = -1{,}0304$$

$$a = a_1 = 0{,}0304$$

$$\eta = \frac{1}{1 + a} = \frac{1}{1 + 0{,}0304} = 0{,}9705$$

$$P_K = F_v \cdot V = 5000 \cdot 120 = 6 \cdot 10^5 \ \text{W} = 600 \ \text{kW}$$

$$P_{uk} = \frac{P_K}{\eta} = \frac{6 \cdot 10^5}{0{,}9705} = 618{,}24 \ \text{kW}$$ ...realno, ova snaga se treba povećati za 10%

11.2 **Ako je brzina zrakoplova *V* = 420 km/h, a brzina klizanja propelera V_K = 460 km/h, potrebno je odrediti:**

a) stupanj korisnosti

b) veličinu podtlaka ispred propelera.

Rješenje:

a) $V_K = V + \Delta V_u = V\left(1 + \frac{\Delta V_u}{V}\right)$

$$\boxed{b = \frac{\Delta V_u}{V}}$$

$$V_K = V(1 + b) \quad \Longrightarrow \quad 1 + b = \frac{V_K}{V}$$

$$b = \frac{V_K}{V} - 1 = \frac{460}{420} - 1 = 0{,}0952$$

$$a = \frac{b}{2} = \frac{0{,}0952}{2} = 0{,}0476$$

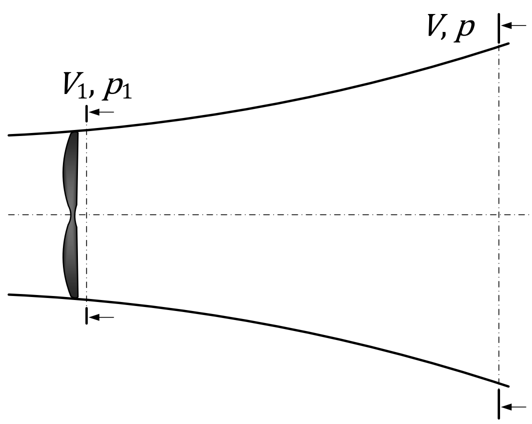
$$\eta = \frac{1}{1 + a} = \frac{1}{1 + 0{,}0476} = 0{,}955$$

b) $V_1 = V + \frac{\Delta V_u}{2} = V\left(1 + \frac{\Delta V_u}{2V}\right) = V(1 + a)$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

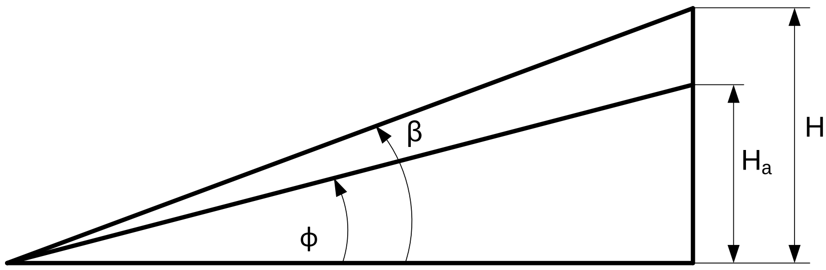
$$\Delta p_1 = \frac{1}{2}\rho V^2 - \frac{1}{2}\rho V^2(1 + a)^2 = \frac{1}{2}\rho V^2(1 - 1 - 2a - a^2)$$

$$\Delta p_1 = -\frac{1}{2}\rho V^2 a(2 + a) = -\frac{1}{2} \cdot 1{,}225 \cdot \left(\frac{420}{3{,}6}\right)^2 \cdot 0{,}0476 \cdot (2 + 0{,}0476) = -812{,}9 \text{ Pa}$$



Odrediti stvarni, aerodinamički korak propelera ako je brzina leta *V* = 450 km/h pri broju okretaja *n* = 1800 o/min, a konstruktivni korak *H* = 4500 mm. Odredi koliko je klizanje i relativno klizanje propelera. **11.3**

Rješenje:



g)
h)

Aerodinamički korak – put koji zrakoplov prijeđe za vrijeme jednog okretaja propelera

$$n = 1800\ \text{o/min} = 30\ \text{o/s}$$

$$t = \frac{1}{n} = \frac{1}{30}\ \text{s}$$

$$H_a = V \cdot t = \frac{450}{3,6} \cdot \frac{1}{30} = 4,167\ \text{m}$$

$K = H - H_a = 4,5 - 4,167 = 0,333\ \text{m}$ ... klizanje

$K_r = \frac{K}{H} = \frac{0,333}{4,5} = 0,0741 = 7,41\%$ ... relativno klizanje

11.4 **Zrakoplov ima pogonsku grupu klipni motor – propeler čije su karakteristike prikazane na dijagramu. Promjer propelera je 2 m, a lopatice su postavljene pod kutom 45°. Pri brzini zrakoplova od 200 km/h i broju okretaja propelera *n* = 800 o/min, snaga propelera je 220 kW. Odredi potrebnu snagu motora u tom slučaju.**

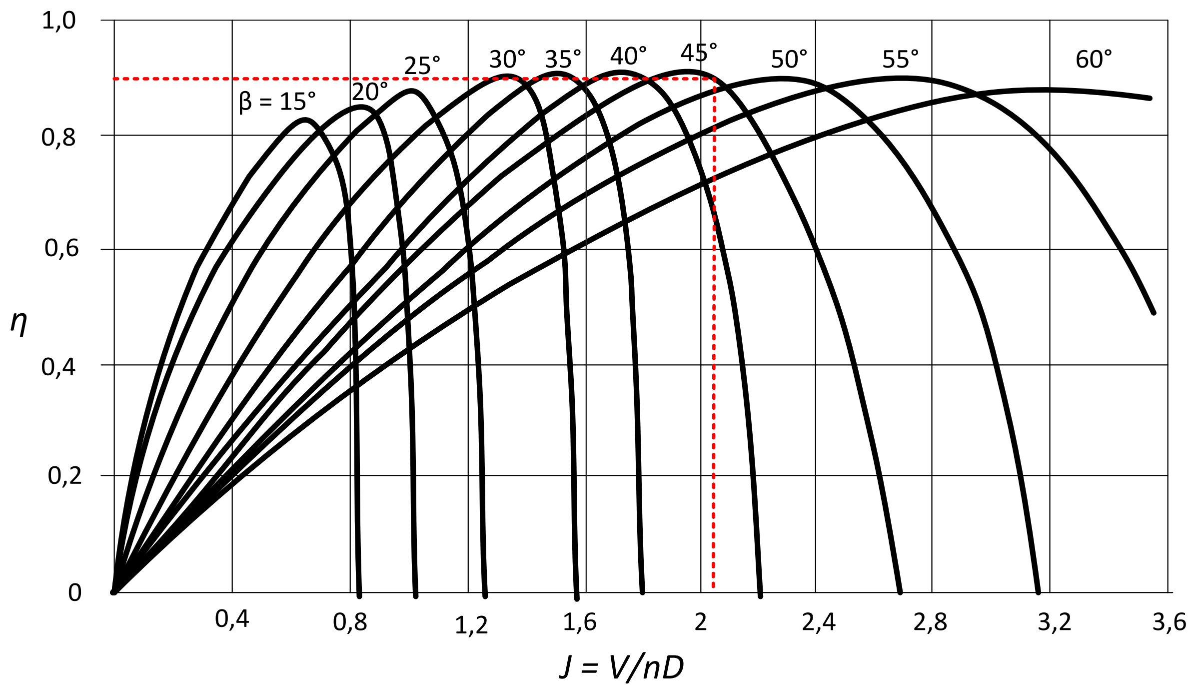
Rješenje:

a)

$$J = \frac{V_\infty}{nD} = \frac{\frac{200}{3,6}}{\frac{800}{60} \cdot 2} = 2,083$$

$$\left.\begin{array}{l} J = 2,083 \\ \beta = 45° \end{array}\right. \Rightarrow \quad \eta = 0,9 \quad \text{... iz dijagrama}$$

$$P_M = \frac{P_P}{\eta} = \frac{220}{0,9} = 244,4 \ \text{kW}$$



11.5

Zrakoplov ima pogonsku grupu koja se sastoji od klipnog motora i propelera promjera *D* = 3,048 m. Karakteristike pogonske grupe mogu se odrediti iz priloženog dijagrama (str. 124). Pri letu na visini 5000 m snaga koju propeler dobiva od motora iznosi P_M = 385,5 kW. Lopatice propelera postavljene su pod kutom 55°, a broj okretaja je *n* = 900 o/min. Odredi:

a) korisnost propelera

b) korisnu snagu propelera

c) brzinu zrakoplova

d) vučnu silu zrakoplova

Rješenje:

$$H = 5000 \text{ m}$$

$$\rho = \rho_0(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5}H)^{4{,}256} = 1{,}225 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 5000)^{4{,}256} = 0{,}7359 \ \text{kg/m}^3$$

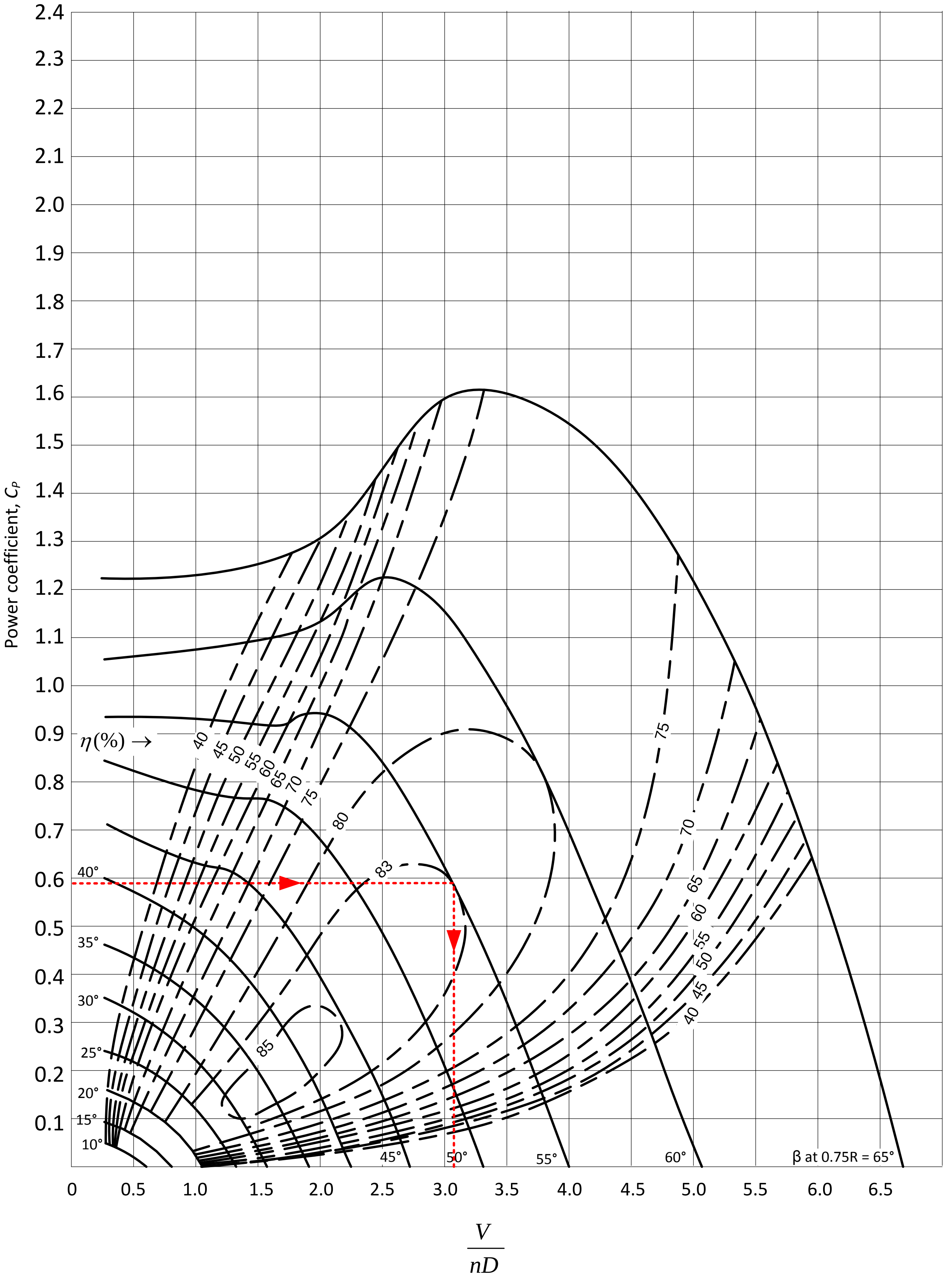
a) $$P_M = C_p \rho n^3 D^5 \quad \Longrightarrow \quad C_p = \frac{P_M}{\rho n^3 D^5} = \frac{385\,500}{0{,}7359 \cdot \left(\frac{900}{60}\right)^3 \cdot 3{,}048^5} = 0{,}59$$

$$\left.\begin{array}{l} C_p = 0{,}59 \\ \beta = 55° \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} J = 3{,}1 \\ \eta = 0{,}83 \end{array} \quad \text{... iz dijagrama}$$

b) $$P_K = P_M \cdot \eta = 385\,500 \cdot 0{,}83 = 319\,965 \ \text{W} = 320 \text{ kW}$$

c) $$J = \frac{V}{nD} \quad \Longrightarrow \quad V = J \cdot n \cdot D = 3{,}1 \cdot \frac{900}{60} \cdot 3{,}048 = 141{,}7 \ \text{m/s}$$

d) $$F_v = \frac{P_k}{V} = \frac{319\,965}{141{,}7} = 2258 \ \text{N}$$


Power coefficient, C_P
2.4
2.3
2.2
2.1
2.0
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
$\eta(\%) \rightarrow$
40 45 50 55 60 65 70 75 80 83 85
75 70 65 60 55 50 45 40
40° 35° 30° 25° 20° 15° 10°
45° 50° 55° 60°
β at 0.75R = 65°
0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5 5.0 5.5 6.0 6.5
$\frac{V}{nD}$

11.6

Zrakoplov ima pogonsku grupu koju čine klipni motor i propeler oznake 5868 – R6, s tri lopatice, profila CLARK–Y, promjerom 2200 mm i s kontinuiranom promjenom koraka. Pri broju okretaja propelera od 2000 o/min napadni kut lopatica postavlja se na 35° kako bi se osigurao najveći stupanj djelovanja (korisnosti) propelera. S obzirom na dostupne podatke iz dijagrama ove pogonske skupine (str. 126) odredi:

a) brzinu zrakoplova

b) potrebnu snagu motora pri tim uvjetima za let na visini 3000 m

c) vučnu silu propelera.

Rješenje:

$H = 3000\ \mathrm{m}$

$\rho = \rho_0(1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} H)^{4{,}256} = 1{,}225 \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot 3000)^{4{,}256} = 0{,}90895\ \ \mathrm{kg/m^3}$

a) Pomoću dijagrama 2

$$\left.\begin{array}{l}\eta_{max} = 0{,}85 \\ \beta = 35^\circ\end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \frac{V}{nD} = 1{,}5 \quad \Longrightarrow V = 1{,}5 \cdot n \cdot D = 1{,}5 \cdot \frac{2000}{60} \cdot 2{,}2 = 110\ \ \mathrm{m/s}$$

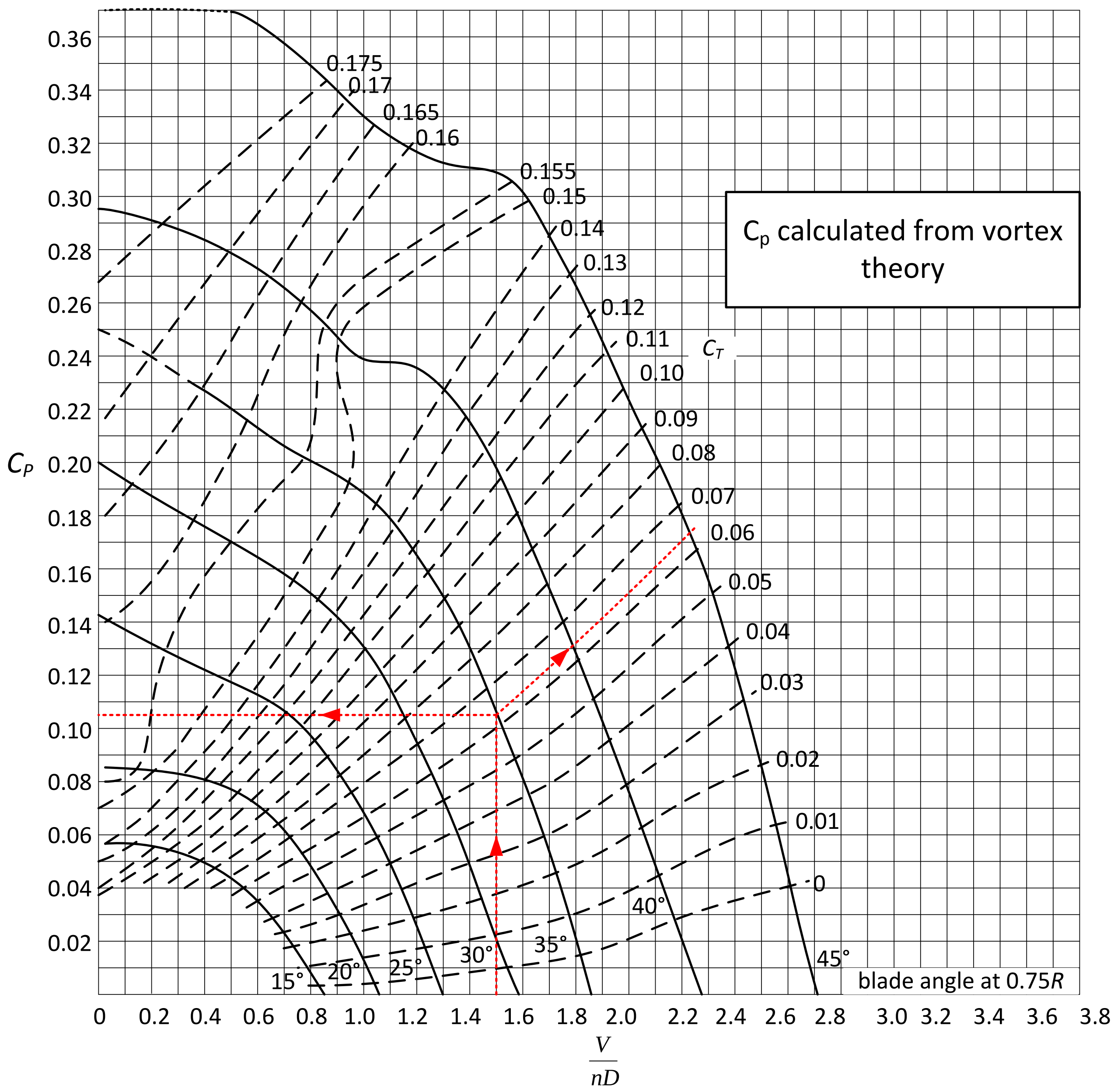
b) Pomoću dijagrama 1

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{V}{nD} = 1{,}5 \\ \beta = 35^\circ\end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad C_p = 0{,}112$$

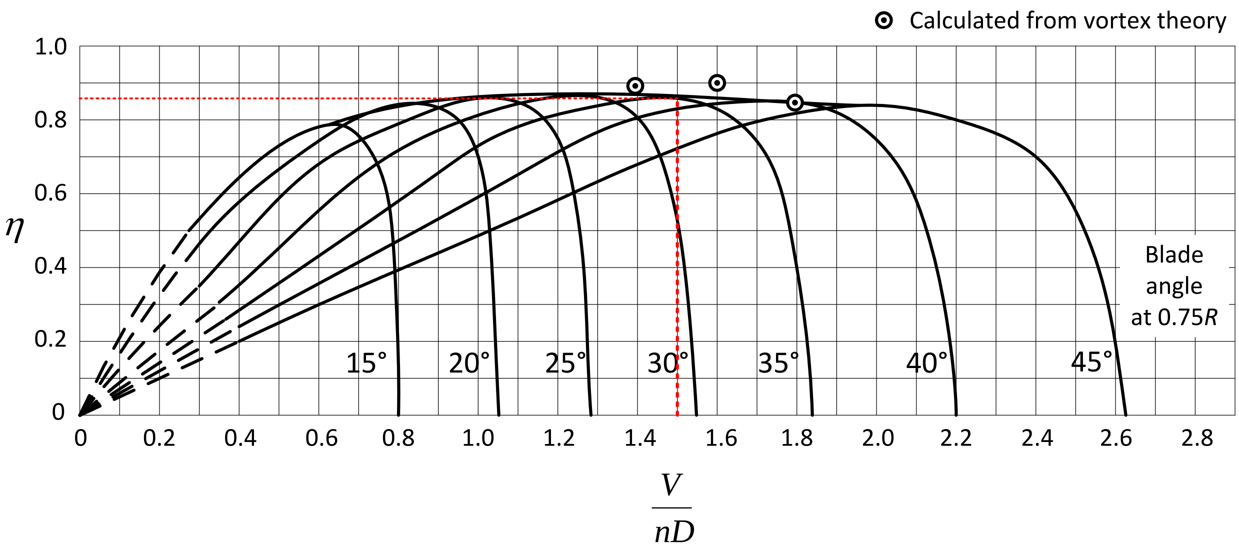
$$P_M = C_p \cdot \rho \cdot n^3 \cdot D^5 = 0{,}112 \cdot 0{,}90895 \cdot \left(\frac{2000}{60}\right)^3 \cdot 2{,}2^5 = 194{,}3\ \ \mathrm{kW}$$

c) $P_P = \eta \cdot P_M = 0{,}85 \cdot 194{,}3 = 165{,}2\ \ \mathrm{kW}$

$$F_v = \frac{P_P}{V} = \frac{165200}{110} = 1502\ \ \mathrm{N}$$



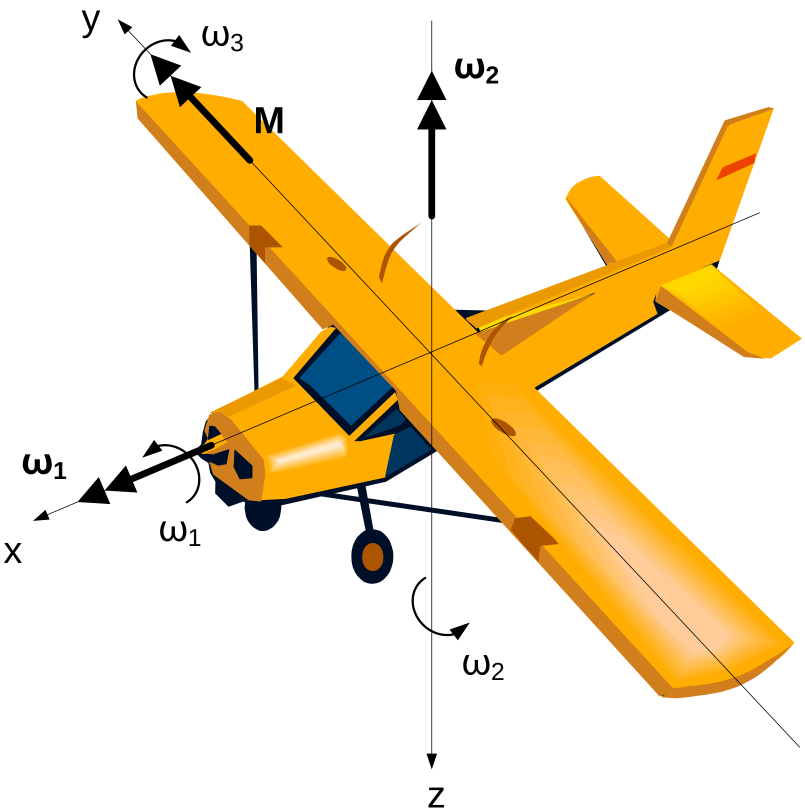
C_p calculated from vortex theory
C_P
C_T
0.175
0.17
0.165
0.16
0.155
0.15
0.14
0.13
0.12
0.11
0.10
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
15°
20°
25°
30°
35°
40°
45°
blade angle at 0.75R
$\frac{V}{nD}$



Calculated from vortex theory
η
15°
20°
25°
30°
35°
40°
45°
Blade angle at 0.75R
$\frac{V}{nD}$

Klipni motor s unutarnjim izgaranjem okreće se s 1200 okr/min. Moment inercije masa koje se okreću zajedno s desnim propelerom je 15 kgm^2. Ako zrakoplov skreće lijevo kutnom brzinom 4 okr/min, odredi intenzitet, pravac i smjer djelovanja (vektora) žiroskopskog momenta. **11.7**

Rješenje:



$$\omega_1 = 2\pi n_1 = 2\pi \frac{1200}{60} = 40\pi = 125{,}66\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_2 = 2\pi n_2 = 2\pi \frac{4}{60} = \frac{2\pi}{15} = 0{,}419\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\vec{M} = \mathbb{I}_1 \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = 15 \cdot 40\pi \cdot \frac{2\pi}{15} \cdot 1 = 80\pi^2$$

$$M = 789{,}6\ \mathrm{Nm}$$

11.8 **Propeler 5868-9 od aeroprofila Clark Y, s 4 kraka, promjera 3,5 m, okreće se s 1200 okr/min pri brzini leta 56 m/s. Odredi i grafički prikaži kako se mijenja stupanj korisnog djelovanja u ovisnosti o konstruktivnom kutu krakova.**

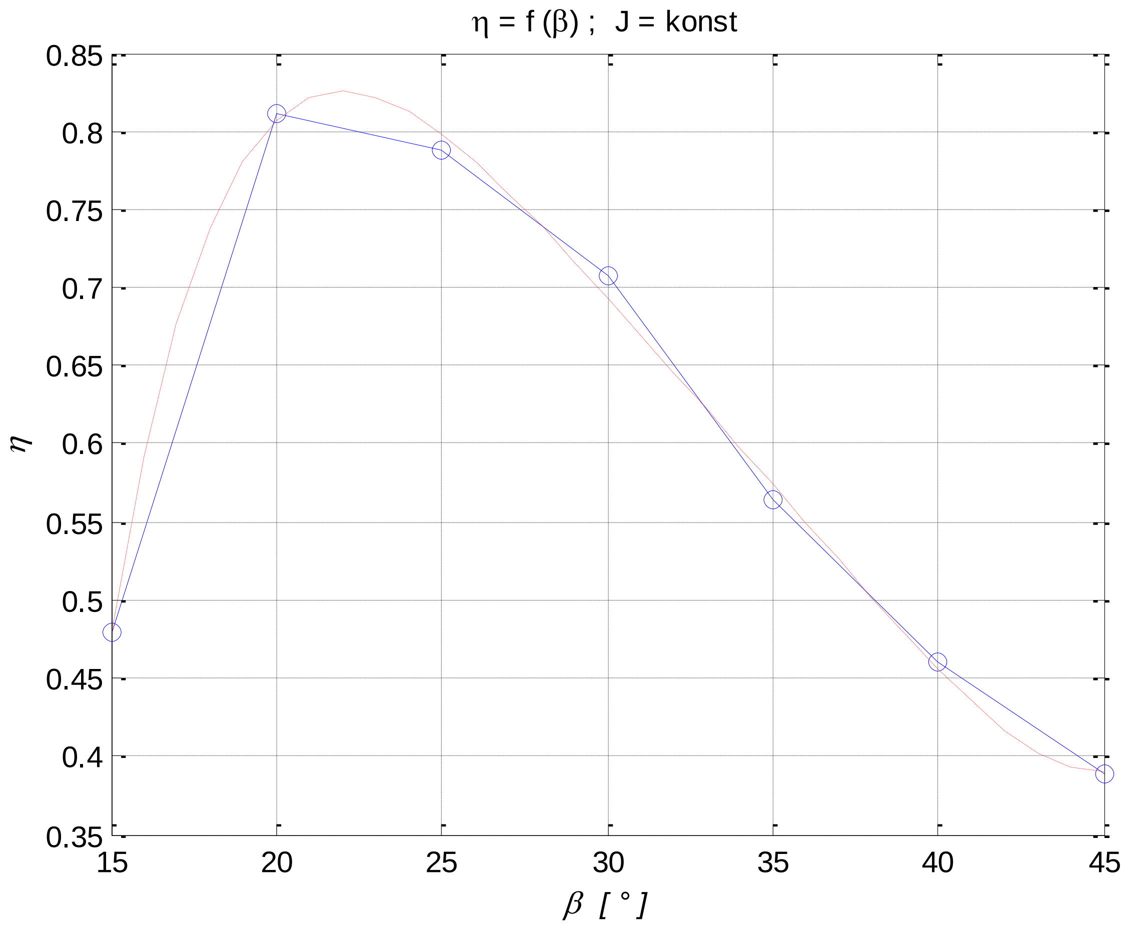
$\boldsymbol{\beta}$	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$\boldsymbol{C_P}$	0,01	0,07	0,131	0,206	0,275	0,357	0,44
$\boldsymbol{C_T}$	0,006	0,071	0,129	0,182	0,194	0,2052	0,214

$$J = \frac{V}{nD} = \frac{56}{200 \cdot 3{,}5} = 0{,}08$$

$$\eta = \frac{P_k}{P_u} = \frac{F_V \cdot V}{P_u} = \frac{C_T \cdot \rho \cdot n^2 D^4 V}{C_P \cdot \rho \cdot n^2 D^4} = \frac{C_T}{C_P} \cdot J$$

```
% Prikaz promjene stupnja korisnog djelovanja u ovisnosti o konstruktivnom
% kutu krakova za propeler 5868-9 od aeroprofila Clark Y, s 4 kraka,
% promjera 3,5 m, koji se okreće se s 1200 okr/min pri brzini leta 56 m/s.

V=56; %brzina leta zrakoplova  [m/s]
n=1200/60; % [okr/s]
D=3.5; %[m] promjer propelera
J=V/(n*D);%koeficijent napredovanja
beta=15:5:45; %konstruktivni kut krakova
Cp=[0.01 0.07 0.131 0.206 0.275 0.357 0.44];%koef. snage
CT=[0.006 0.071 0.129 0.182 0.194 0.2052 0.214];%koef. vučne sile
for i=1:length(Cp);
eta(i)=CT(i)*J/Cp(i)
end
p=polyfit(beta,eta,5)
betap=15:1:45;
```

```
etap=polyval(p,betap);

plot(beta,eta,'o-',betap,etap,'r:')

xlabel( '\it\beta  [ ° ]' )

title ('\eta = f (\beta) ;  J = konst')

ylabel('\it\eta')

grid on
```



12 AERODINAMIČKA SLIČNOST

Za razliku od teorijske aerodinamike koja postavlja matematički model strujanja, eksperimentalna aerodinamika postavlja fizički model koji simulira stvarni objekt u struji fluida. Fizički model je obično manji od stvarnog modela, a aerodinamička sličnost između njih postoji ako su ispunjeni uvjeti:

- geometrijske,
- kinematičke,
- dinamičke i
- toplinske sličnosti.

Geometrijske sličnost podrazumijeva sličnost geometrijskih oblika modela, objekta i konturnih uvjeta, uključujući i hrapavost površine. Kinematička sličnost je uspostavljena ako su brzine u odgovarajućim točkama modela i objekta, istog pravca i smjera te konstantnog odnosa intenziteta brzine.
Dinamička sličnost je uspostavljena ako u odgovaraućim točkama modela i objekta, na česticu fluida djeluju iste vrste sila u istom smjeru i pravcu, a intenziteti tih sila daju količnik konstantne vrijednosti.

Najčešće korišteni kriteriji aerodinamičke sličnosti uključuju uspostavljanje jednakosti Reynoldsovog (*Re*), Machovog (*Ma*), Froudovog (*Fr*), Strouhalovog (*St*) i ε_t broja na modelu i objektu.

12.1 **Zrakoplov ima masu 6800 kg. Na visini od 1500 m ekvivalentna brzina zrakoplova je 115 km/h. Odredi omjere dimenzija i sila uzgona zrakoplova i modela pogodnog za testiranje u aerotunelu s komprimiranim zrakom čije su karakteristike *V* = 30,5 m/s, *p*₀ = 22 bar i *t* = 15°C.**

Rješenje:

Zrakoplov

$H = 1500\text{ m}$

$$p_z = 84\,547\text{ Pa}$$
$$T_z = 278{,}4\text{ K}$$
$$\mu_z = 1{,}7426\cdot 10^{-5}\text{ Pas}$$
$$\rho_z = 1{,}058\text{ kg/m}^3$$

$$V_z = V_e\sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_z}}$$

$$V_z = \frac{115}{3{,}6}\sqrt{\frac{1{,}225}{1{,}058}} = 34{,}4\text{ m/s}$$

Model

Karakteristike zraka u aerotunelu:

$$p_M = 22\text{ bar} = 22\cdot 10^5\text{ Pa}$$
$$T_M = 15 + 273{,}15 = 288{,}15\text{ K}$$
$$\mu_M = 1{,}7888\cdot 10^{-5}\text{ Pas}$$
$$\rho_M = \frac{p_M}{RT_M} = \frac{22\cdot 10^5}{287{,}053\cdot 288{,}15} = 26{,}6\text{ kg/m}^3$$

$$V_M = 30{,}5\text{ m/s}$$

$$Re_z = Re_M$$

$$\frac{\rho_z V_z \ell_z}{\mu_z} = \frac{\rho_M V_M \ell_M}{\mu_M} \quad\Rightarrow\quad \frac{\ell_z}{\ell_M} = \frac{\rho_M V_M}{\rho_z V_z}\cdot\frac{\mu_z}{\mu_M} = \frac{26{,}6\cdot 30{,}5\cdot 1{,}7426\cdot 10^{-5}}{1{,}058\cdot 34{,}4\cdot 1{,}788\cdot 10^{5}} = 21{,}7$$

$$\ell_z = 21{,}7\cdot \ell_M$$

$$F_z = C_z\frac{1}{2}\rho V^2 A$$

$$F_{z_z} = C_{z_z}\frac{1}{2}\rho_z {V_z}^2 A_z \qquad\qquad F_{z_M} = C_{z_M}\frac{1}{2}\rho_M {V_M}^2 A_M$$

$$C_{z_z} = C_{z_M} \quad (\alpha_z = \alpha_M)$$

$$\frac{F_{z_z}}{F_{z_M}} = \frac{C_{z_z}\frac{1}{2}\rho_z {V_z}^2 A_z}{C_{z_M}\frac{1}{2}\rho_M {V_M}^2 A_M} = \frac{\rho_z {V_z}^2 {\ell_z}^2}{\rho_M {V_M}^2 {\ell_M}^2} = \frac{1{,}058\cdot 34{,}4^2}{26{,}6\cdot 30{,}5^2}\cdot 21{,}7^2 = 23{,}8$$

$$\frac{\left(\frac{F_z}{A}\right)_z}{\left(\frac{F_z}{A}\right)_M} = \frac{F_{z_z}}{F_{z_M}}\cdot\frac{A_M}{A_z} = \frac{F_{z_z}}{F_{z_M}}\cdot\frac{{\ell_M}^2}{{\ell_z}^2} = 23{,}8\cdot\frac{1}{21{,}7^2} = \frac{1}{19{,}8}$$

Opterećenje modela je oko 20x veće od opterećenja zrakoplova → materijal modela mora imati oko 20x veću čvrstoću.

12.2

Model zrakoplova se ispituje u aerodinamičkom tunelu s komprimiranim zrakom konstantne temperature od 15°C. Pokušava se simulirati let na visini 5000 m pri brzini 85 m/s. Omjer dimenzija zrakoplova i modela je 15:1, a brzina strujanja zraka preko modela jednaka je brzini zrakoplova. Odredi potreban tlak zraka u aerotunelu.

Rješenje:

Zrakoplov

$V_z = 85 \text{ m/s}$

$H = 5000 \text{ m}$

$\rho_z = 0{,}7364 \text{ kg/m}^3$

$T_z = 255{,}65 \text{ K}$

$\mu_z = 1{,}6282 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$

Model

$V_M = 85 \text{ m/s}$

$T_M = 15 + 273{,}15 = 288{,}15 \text{ K}$

$\mu_M = 1{,}7894 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$

$$\frac{\ell_z}{\ell_M} = 15$$

$$Re_z = Re_M$$

$$\frac{\rho_z V_z \ell_z}{\mu_z} = \frac{\rho_M V_M \ell_M}{\mu_M}$$

$$\rho_M = \frac{\ell_z}{\ell_M}\frac{\mu_M}{\mu_z}\frac{V_z}{V_M}\rho_z$$

Kako je iz jednadžbe stanja $\rho_M = \dfrac{p_M}{RT_M}$, te $V_z = V_M$, slijedi:

$$\frac{p_M}{RT_M} = \frac{\ell_z}{\ell_M}\frac{\mu_M}{\mu_z}\rho_z$$

$$p_M = \frac{\ell_z}{\ell_M}\frac{\mu_M}{\mu_z}\rho_z R T_M = 15 \cdot \frac{1{,}7894}{1{,}6282} \cdot 0{,}7364 \cdot 287{,}053 \cdot 288{,}15 = 10{,}04 \cdot 10^5 \text{ Pa} \approx 10 \text{ bar}$$

12.3 **Zrakoplov sa srednjom duljinom tetive 1 m, leti na visini 18 km uz *Ma* = 0,85. Model tog zrakoplova razmjera 1:10 ispituje se u aerodinamičkom tunelu sa zrakom temperature 40°C. Odredi ostale uvjete u tunelu da se ostvare uvjeti aerodinamičke sličnosti.**

Rješenje:

$$Re_z = Re_M$$

$$\frac{\rho_z V_z \ell_z}{\mu_z} = \frac{\rho_M V_M \ell_M}{\mu_M}$$

$H = 18\,000$ m

$$\rho_z = 0{,}1217 \ \text{kg/m}^3$$
$$T_z = 216{,}65 \ \text{K}$$
$$p_z = 7565 \ \text{Pa}$$

$$a_z = \sqrt{\kappa R T_z} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 216{,}65} = 295{,}1 \ \text{m/s}$$

$$Ma_z = \frac{V_z}{a_z} \quad \Longrightarrow \quad V_z = Ma_z \cdot a_z = 0{,}85 \cdot 295{,}1 = 250{,}8 \ \text{m/s}$$

$$a_M = \sqrt{\kappa R T_M} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot 313{,}15} = 354{,}7 \ \text{m/s}$$

$$Ma_z = Ma_M \quad \Longrightarrow \quad \frac{V_z}{a_z} = \frac{V_M}{a_M} \quad \Longrightarrow \quad V_M = V_z \cdot \frac{a_M}{a_z}$$

$$V_M = V_z \cdot \frac{a_M}{a_z} = 250{,}8 \cdot \frac{354{,}7}{295{,}1} = 301{,}5 \ \text{m/s}$$

$$\mu = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0{,}76}$$

$$\frac{\rho_z V_z \ell_z}{2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot T_z^{\,0{,}76}} = \frac{\rho_M V_M \ell_M}{2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot T_M^{\,0{,}76}} \quad \Longrightarrow \quad \rho_M = 10 \cdot \rho_z \cdot \frac{V_z}{V_M}\left(\frac{T_M}{T_z}\right)^{0{,}76}$$

$$\rho_M = 10 \cdot 0{,}1217 \cdot \frac{250{,}8}{301{,}5} \cdot \left(\frac{313{,}15}{216{,}65}\right)^{0{,}76} = 1{,}339 \ \text{kg/m}^3$$

$$p_M = \rho_M R T_M = 1{,}339 \cdot 287{,}053 \cdot 313{,}15 = 120\,364 \ \text{Pa}$$

12.4

Izrađeno je 5 modela za određeni zrakoplov koji se ispituje pod različitim uvjetima u aerodinamičkom tunelu. Odredi koji modeli daju najbolju sličnost sa zrakoplovom.

	Zrakoplov	**Modeli**				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Raspon ***b*** **[m]**	15	3	3	1,5	1,5	3
Rel. gustoća $\delta = \rho/\rho_0$	0,533	1	3	1	10	10
Temperatura ***t*** **[°C]**	-24,6	15	15	15	15	15
Brzina ***V*** **[m/s]**	90	90	90	25	54	54
μ **(**$\cdot 10^{-6}$**)**	15,93	17,80	17,80	17,80	17,80	17,80
$Re \cdot 10^{-6}$	55,33	18,58	55,74	2,58	55,74	111,49
a **[m/s]**	316	340,3	340,3	340,3	340,3	340,3
Ma	0,285	0,264	0,264	0,073	0,159	0,159

Rješenje:

$$\mu = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0{,}76} = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot (t + 273{,}15)^{0{,}76}$$

$$Re = \frac{\rho V b}{\mu} = \frac{\delta \rho_0 V b}{\mu} = 1{,}225 \cdot \frac{\delta V b}{\mu}$$

Modeli **C** i **E** imaju Reynoldsov broj približno jednak Reynoldsovom broju zrakoplova.

$$a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287{,}053 \cdot T} = 20{,}05\sqrt{T}$$

$$Ma = \frac{V}{a}$$

Budući da je u svim slučajevima $Ma \ll 1$ nije potrebno tražiti sličnost po *Ma*.

PRILOZI

A. Tablica standardne atmosfere

H [m]	T [K]	p [Pa]	ρ [kg/m^3]	a [m/s]	ν [m^2/s]
0	288,15	101325	1,225	340,3	1,460E-05
500	284,9	95460,1	1,1673	338,4	1,519E-05
1000	281,65	89873,2	1,1116	336,4	1,582E-05
1500	278,4	84554,1	1,0580	334,5	1,647E-05
2000	275,15	79492,7	1,0065	332,5	1,716E-05
2500	271,9	74679,6	0,9568	330,6	1,789E-05
3000	268,65	70105,2	0,9091	328,6	1,866E-05
3500	265,4	65760,4	0,8632	326,6	1,947E-05
4000	262,15	61636,2	0,8191	324,6	2,033E-05
4500	258,9	57724,1	0,7767	322,6	2,123E-05
5000	255,65	54015,4	0,7361	320,5	2,219E-05
5500	252,4	50502,1	0,6971	318,5	2,321E-05
6000	249,15	47176,2	0,6596	316,4	2,428E-05
6500	245,9	44029,9	0,6238	314,4	2,542E-05
7000	242,65	41055,7	0,5894	312,3	2,663E-05
7500	239,4	38246,4	0,5566	310,2	2,792E-05
8000	236,15	35594,7	0,5251	308,1	2,929E-05
8500	232,9	33094	0,4950	305,9	3,074E-05
9000	229,65	30737,4	0,4663	303,8	3,229E-05
9500	226,4	28518,6	0,4388	301,6	3,394E-05
10000	223,15	26431,3	0,4126	299,5	3,570E-05
10500	219,9	24469,5	0,3877	297,3	3,758E-05
11000	216,65	22627,3	0,3639	295,1	3,958E-05
11500	216,65	20916	0,3363	295,1	4,282E-05
12000	216,65	19330,1	0,3108	295,1	4,634E-05
13000	216,65	16509,9	0,2655	295,1	5,425E-05
14000	216,65	14101,2	0,2267	295,1	6,352E-05
15000	216,65	12044,0	0,1937	295,1	7,437E-05
16000	216,65	10286,8	0,1654	295,1	8,707E-05
17000	216,65	8786,0	0,1413	295,1	1,019E-04
18000	216,65	7504	0,1207	295,1	1,194E-04
19000	216,65	6409,4	0,1031	295,1	1,397E-04
20000	216,65	5474,3	0,0880	295,1	1,636E-04

B. Popis formula

$\tau = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$	viskoznost fluida	$T\,[\mathrm{K}] = t\,[^\circ\mathrm{C}] + 273{,}15$	$\delta\vec{F} = p \cdot \delta\vec{S}$	$p = \rho \cdot g \cdot h = \gamma \cdot h$	$\rho = \frac{m}{\forall}$	$v_s = \frac{1}{\rho}$			
$\rho = \frac{p}{R \cdot T}$	jednadžba stanja idealnog plina	$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{ref}}}$	relativna gustoća	$R = 287{,}053\ \mathrm{J/kgK}$	$\mu = 1{,}7894 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pas}$	za zrak pri ISA/SL			
$\nu = \frac{\mu}{\rho}\ [\mathrm{m^2/s}]$	kinematička viskoznost	$\mu = 2{,}417 \cdot 10^{-7} \cdot T^{0{,}76}\ [\mathrm{Pas}]$	eksponencijalni zakon	$\mu = 1{,}458 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{T^{1{,}5}}{T + 110{,}4}$	Sutherlandov zakon				
$E = -\forall \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\forall}$	modul elastičnosti fluida	$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{E}$	$E = \rho \cdot a^2$	$Ma = \frac{V}{a}$	Machov broj	$a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$	brzina zvuka	$\kappa = 1{,}4$	za zrak
$c_v = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}T}\right)_{\forall = const}$	$c_p = \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}T}\right)_{p = const}$	spec. topline pri konstantnom volumenu ili tlaku [J/(kg·K)]	$R = c_p - c_v$	$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$	$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1}$	$c_v = \frac{R}{\kappa - 1}$			
$u = c_v \cdot T$ [J/kg]	unutrašnja energija	$h = u + p \cdot v = c_p \cdot T$ [J/kg]	entalpija	$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}q_{rev}}{T}$	entropija [J/(kg·K)]	$H = \frac{R_0}{R_0 + h} \cdot h$			
$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln\frac{p_2}{p_1} = c_v \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} + \cdot \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$p_a = p_z + p_p$	Daltonov zakon	$\rho_{vz} = \rho_z + \rho_p$	$\varphi = \frac{\rho_p}{\rho_{p\,\max}} = \frac{p_p}{p_{pz}}$	rel. vlaž.				
$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\rho \cdot g$	osnova diferencijalna jednadžba aerostatike	$F_z = \rho \cdot g \cdot \forall$	sila aerostatskog uzgona	$g = g_n \cdot \left(\frac{R_0}{R_0 + h}\right)^2$	$\rho_{vz} = \frac{p_a}{R \cdot T} - \frac{\varphi \cdot p_{pz}}{T}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_p}\right)$				
$T = T_n - \Delta\, 6{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot H$	$p = p_n \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{5{,}256}$	$\rho = \rho_n \cdot (1 - 2{,}256 \cdot 10^{-5} \cdot H)^{4{,}256}$	promjena temperature, tlaka i gustoće zraka u troposferi						
$T = 216{,}65\ = \mathrm{const.}$	$p = 0{,}22336 \cdot p_n \cdot \mathrm{e}^{-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11000)}$	$\rho = 0{,}29708 \cdot \rho_n \cdot \mathrm{e}^{-1{,}577 \cdot 10^{-4}(H - 11000)}$	temperatura, tlak i gustoća u donjem sloju stratosfere						
$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho V A$	$Q = \frac{\Delta\forall}{\Delta t} = VA$	maseni i volumenski protok	$\dot{m} = const.$	jednadžba kontinuiteta	$\mathrm{p} + \frac{1}{2}\rho\mathrm{V}^2 + \rho g \mathrm{z} = \mathrm{const.}$	Bernoullijeva jednadžba			
$\frac{\partial}{\partial t}\int_\forall \rho\vec{V}\, d\forall + \int_S (\rho\vec{V} \cdot d\vec{S}) \cdot \vec{V} = \int_\forall \rho\vec{f}\, d\forall - \int_S p d\vec{S} + \vec{F}_{visc} + \vec{F}_{kont} + \vec{F}_{osl}$	jednadžba održanja količine gibanja	$V_e = V\sqrt{\frac{\rho}{\rho_n}}$	ekvivalentna brzina						
$\alpha_a = \alpha - \alpha_{z0}$	$\lambda = \frac{c(s)}{c(0)}$	$AR = \frac{b^2}{S}$	$Z' = c_z \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 A$	$X' = c_x \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 A$	$M'_{PB} = c_{MPB} \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 A \cdot c$	$q_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$			
$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2$	$c_{M\xi} = c_{MAC} + (c_z \cos\alpha + c_x \sin\alpha)(\bar{\xi} - \bar{\xi}_{AC})$	$\bar{\xi} = \frac{\xi}{c}$	$c_{MPB} = -\xi_{CP}(c_z \cos\alpha + c_x \sin\alpha)$						
$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$	$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$	$w = \phi + i\psi$	$z = x + iy = re^{i\theta}$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$	$\theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$			
$\bar{V} = \frac{\partial w}{\partial z} = u - iv$	kompleksna brzina	$F'_a = \rho_\infty V_\infty \Gamma b$	teorem Joukowskog	$c_z = 2\pi\alpha_a$	$\mathrm{d}\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\vec{y} \times \vec{r}}{\lvert r\rvert^3}$	Biot – Savartov zakon			
$-\frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{\gamma(x)\mathrm{d}x}{x_0 - x} + V_\infty \sin\left[\alpha - \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_0\right] = 0$	osnovna jednadžba tankog aeroprofila	$c_z = 2\pi\alpha$	$c_{MPB} = -\frac{\pi}{2}\alpha$	$\bar{x}_{CP} = \bar{x}_{AC} = \frac{1}{4}$	simetrični aeroprofil				
$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\theta$	$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$	$c_z = 2A_0\pi + A_1\pi$	$\alpha_{z0} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(1 - \cos\theta)\mathrm{d}\theta$	$c_{MPB} = -\frac{\pi}{2}\left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2}\right)$					
$\bar{x}_{CP} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4}(A_2 - A_1)\frac{1}{c_z}$	$c_{Mx} = -\frac{c_z}{4} - \frac{\pi}{4}(A_1 - A_2) + \frac{x}{c}c_z$	$c_{MAC} = -\frac{\pi}{2}(A_1 - A_2)$	$\bar{x}_{AC} = \frac{1}{4}$	$c_z = 2\pi\alpha_a$	zakrivljeni aeroprofil				
$Re = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{Vx}{\nu}$	$Z = C_z\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 A$	$X = C_x\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 A$							

$\alpha_i = \mathrm{tg}^{-1}\frac{w_{y0}}{V_\infty} \approx \frac{w_{y0}}{V_\infty}$	$\alpha_a = \alpha_0 - \alpha_i$	$\alpha_a = \alpha - \alpha_{z0}$	$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR}$	$\alpha_i = \frac{C_z}{\pi AR}$	$m = \frac{m_0}{1 + \frac{m_0}{\pi AR}}$	eliptično krilo	
$AR = \frac{b^2}{S}$	aspektni odnos	$C_z = m \cdot \alpha_a$	$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi AR}(1+\delta)$	$\delta = \sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{A_n}{A_1}\right)^2$	$e = \frac{1}{1+\delta}$	$C_{xi} = \frac{{C_z}^2}{\pi e AR}$	za krila drugih oblika
$\alpha_a = \alpha_0 + \frac{C_z}{\pi AR}(1+\tau)$	$\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{C_z}{\pi}\left(\frac{1+\tau_1}{AR_1} - \frac{1+\tau_2}{AR_2}\right)$	$Z = C_z \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$	$X = C_x \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$	$M = C_M \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A c$			
$M_{AC,K} = C_{MAC,K}\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S c_a$	$x_{CP,K} = -\frac{M_{RC}}{Z}$	$M_{RC} = M_{AC,K} - Z \cdot x_{AC,K}$	$x_{AC,K} = -\frac{(\mathrm{d}M_{RC}/\mathrm{d}\alpha)}{(\mathrm{d}Z/\mathrm{d}\alpha)}$	$x_{AC,K} = \frac{b}{6}\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}\mathrm{tg}\Lambda$			
$\delta = 5{,}0\sqrt{\frac{\nu x}{V}}$	$\bar{C}_{fl} = 1{,}328\sqrt{\frac{\nu}{V\ell}}$	$X_{fl} = \bar{C}_f \frac{1}{2}\rho V^2 A$	laminarni granični sloj	$Re_{krl} = 5 \cdot 10^5$	$Re_{krl} = \frac{\rho \cdot V \cdot x_{kr}}{\mu}$	tranzicija laminarnog u turbulentni granični sloj	
$\delta = 0{,}371 x^{0,8}\left(\frac{\nu}{V}\right)^{0,2}$	$\bar{C}_{ft} = 0{,}074\frac{1}{Re^{0,2}}$	$\bar{C}_{ft} = \frac{0{,}455}{(\log Re)^{2,58}}$ za $Re > 10^7$	$X_{ft} = \bar{C}_f \frac{1}{2}\rho V^2 A$	turbulentni granični sloj			
$\bar{C}_{ftl} = \frac{0{,}074}{Re^{0,2}} - \frac{1700}{Re}$	$\bar{C}_{ftl} = \frac{0{,}455}{(\log Re)^{2,58}} - \frac{1700}{Re}$ za $Re > 10^7$	laminarno-turbulentni granični sloj	$C_{fstl} = \frac{C_{fstl}}{(1 + 0{,}144 Ma_\infty^2)^{0,65}}$				
$X_{uk} = X_0 + X_l$	$X_0 = X_{0,f} + X_{0,p}$	$X_l = X_{l,f} + X_{l,i}$	$X_{uk} = \sum_{j=1}^{n} X_j$	$X_j = C_{xj}\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A_{ref}$	$X_{uk} = C_{xuk}\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A_{ref}$		
$C_{xuk} = K_0 + K_1 C_z^2$	polara zrakoplova						
$\tau = \frac{\partial C_L/\partial \delta_f}{\partial C_L/\partial \alpha_u} = \frac{\partial \alpha_u}{\partial \delta_f}$	djelotvornost upravljačke površine	$L = C_L q_\infty S_{up}$	$H = C_h q_\infty S_f c_f$	$M = C_M q_\infty S_{up} c$	aerodin. karakteristike upravljačkih površina		
$Ma = \frac{V}{a}$	$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$	$c_p T + \frac{V^2}{2} = const.$	$\frac{a^2}{\kappa - 1}T + \frac{V^2}{2} = const.$	Bernoulli-Lagrangeova jednadžba	$\frac{p}{\rho^\kappa} = const.$		
$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\kappa Ma_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right)$	$C_p \cong -\frac{2\hat{u}}{V_\infty}$	$C_p = \frac{C_{p,nestl}}{\beta} = \frac{C_{p,nestl}}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}$	$C_z = \frac{C_{z,nestl}}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}$	$C_M = \frac{C_{M,nestl}}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}$			
$x_{CP} = x_{CP,nestl}$	$x_{AC} = x_{AC,nestl}$	$C_{p_{kr}} = \frac{2}{\kappa \cdot Ma_{kr}^2}\left[\left(\frac{2 + (\kappa - 1)\cdot Ma_{kr}^2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} - 1\right]$	$Ma_{\infty,kr} = \frac{V_{\infty,kr}}{a}$				
$V_0 = \sqrt{V^2 + V_t^2}$	$V_t = r\omega = 2\pi r n$	$\alpha_a = \beta - \phi$	$H = 2\pi r\,\mathrm{tg}\,\beta$	$H_a = 2\pi r\,\mathrm{tg}\,\phi = \frac{V}{n}$	$S_k = H - H_a$	$\sigma_p = \frac{mc}{2\pi r}$	
$A_p = \frac{D^2\pi}{4}$	$F_v = \rho A_p\left(V + \frac{\Delta V_u}{2}\right)\Delta V_u = \dot{m}\Delta V_u$	$P_u = \dot{m}V\Delta V_u\left(1 + \frac{\Delta V_u}{2V}\right)$	$P_k = F_v V = \dot{m}V\Delta V_u$	$\eta_i = \frac{P_k}{P_u} = \frac{1}{1 + \Delta V_u/(2V)}$			
$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{V}{V_t} = \frac{V}{2\pi r n}$	$J = \frac{V}{nD}$	$F_v = C_T \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^4$	$P_u = C_p \cdot \rho \cdot n^3 \cdot D^5$	$\eta_e = \frac{\mathrm{tg}\,\phi}{\mathrm{tg}(\phi + \gamma)}$	$\eta = \frac{P_k}{P_u} = \eta(J,\beta)$		
$\gamma = \frac{\partial X}{\partial Z} = \frac{c_x}{c_z}$	$C_S = \frac{V/(nD)}{C_P^{0,2}} = V\left(\frac{\rho}{P_u n^2}\right)^{0,2}$	$V_{0P} = \sqrt{V^2 + (D\pi n)^2}$	$Ma_{0P} = Ma\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{J}\right)^2}$	$\vec{M}_3 = (\mathbb{I}_1\vec{\omega}_1) \times \vec{\omega}_2$			
$\frac{l_{m1}}{l_{o1}} = \frac{l_{m2}}{l_{o2}} = \cdots = k_g = const.$	$\frac{V_{m1}}{V_{o1}} = \frac{V_{m2}}{V_{o2}} = \cdots = k_k = const.$	$\frac{F_{in,m1}}{F_{in,o1}} = \frac{F_{in,m2}}{F_{in,o2}} = \frac{F_{\mu,m2}}{F_{\mu,o2}} = \frac{F_{p,m1}}{F_{p,o1}} \ldots = k_F = const.$					
$Re = \frac{\rho V x}{\mu} = \frac{Vx}{\nu}$	$Ma = \frac{V}{a}$	$Fr = \frac{V^2}{gl}$	$Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{C_p}{2}$	$St = \frac{lf}{V_\infty}$	$I_t = \frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\bar{V}_\infty}$	$\varepsilon_t = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{V}_\infty}$	
$Re_m = Re_o$	$Ma_m = Ma_o$	$Fr_m = Fr_o$	$Eu_m = Eu_o$	$St_m = St_o$	$I_{t,m} = I_{t,o}$	$\varepsilon_{t,m} = \varepsilon_{t,o}$	

BIBLIOGRAFIJA

[1] Abbot, I. H., Von Doenhoff, A. E. *Theory of Wing Section.* New York: Dover, 1959.

[2] Anderson, J.D. *Introduction to Flight.* New York: McGraw Hill, 2000.

[3] Anderson, J.D. *Fundamentals of Aerodynamics.* New York: McGraw-Hill, 2001.

[4] Kesić, P. *Osnove aerodinamike.* Zagreb: FSB, 2003.

[5] Kuethe, A. M., Chow, C. *Foundations of Aerodynamics.* New York: John Wiley & Sons, 1986.

[6] McCormick, B. *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics.* New York: John Wiley & Sons, 1995.

[7] Rendulić, Z. *Aerodinamika.* Zemun: RO Sava Mihić, 1984.